# Франц Герман

## Теория упаковок клеточных полей

franz.h-n@yandex.ru

*В математике задачей на упаковку принято называть задачу, в которой заданное множество математических объектов требуется как можно более экономно упаковать в заданном пространстве по заданным правилам.*

*Мартин Гарднер*

*На самом деле за любой системой счисления стоит, конечно, одна и та же старушка арифметика.*

*Мартин Гарднер*

## 1 Простейшие упаковки

В этой работе мы познакомимся с некоторыми упаковками и алгоритмами заполнения упаковок некоторых замкнутых клеточных полей.

Что такое клеточное поле.

Совокупность из ***n*** клеток будем называть клеточным полем (или решеткой).

***Пример***:

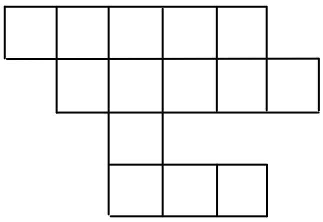


Рис. 1

Если поле содержит ***n*** клеток, то будем говорить, что порядок этого поля равен ***n***. Поле, изображённое на Рис. 1 имеет порядок ***n* = 14**.

Мы будем рассматривать поля, на которых задан порядок следования клеток друг за другом (очерёдность).

***Пример***:

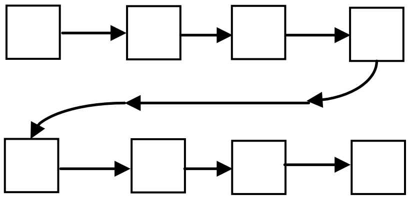


Рис.2

Порядок следования может быть задан словесно, а не обязательно в виде стрелок, как на Рис.2.

Например, клетки поля (Рис.2) заполняются построчно слева-направо и строки чередуются сверху-вниз.

Если поле имеет замкнутый порядок следования клеток, то такое поле будем называть замкнутым клеточным полем.

***Пример***:

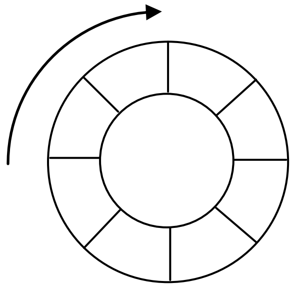


Рис.3

Здесь порядок следования задаётся движением по часовой стрелке. Если поле замкнуто, то его порядок будем называть периодом и обозначать буквой $\boldsymbol{P}$. На Рис.3 изображено поле с периодом $\boldsymbol{P} = \mathbf{8}$.

Скажем ещё два слова о том, что такое упаковка чисел.

Упаковка чисел это клеточное поле, в каждой клетке которого по определённому алгоритму (правилу), расположены неповторяющиеся последовательные числа. Мы рассмотрим алгоритмы (нетривиальные), которые позволяют заполнять некоторые замкнутые клеточные поля без пробелов, т. е. такие, чтобы ни одна клетка поля не оставалась пустой.

Рассмотрим один из таких алгоритмов упаковки.

1). Число **1** помещается в произвольную клетку замкнутого поля.

2). Число **2** помещается в следующую клетку поля, следуя направлению обхода.

3). Число **3** помещается в клетку, через одну клетку после числа **2**.

4). Число **4** помещается в клетку, через две клетки после числа **3**.

и т. д.

5). Число $\boldsymbol{m}$**+1** помещается в клетку, через $\boldsymbol{m}$**-1** клетку после числа $\boldsymbol{m}$.

и т. д..

6). Число $\boldsymbol{n}$ помещается в клетку, через $\boldsymbol{n}$ **-2** клетки после числа $\boldsymbol{n}$ **-1**.

***Пример***: пусть имеем замкнутое клеточное поле с периодом $\boldsymbol{P} = \mathbf{8}$. Заполним его, следил нашему алгоритму.

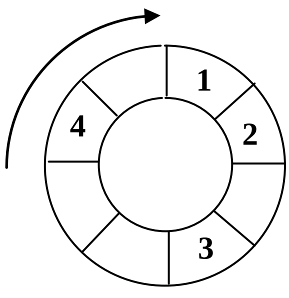



Рис. 4

И т. д..
Получаем такую картину:

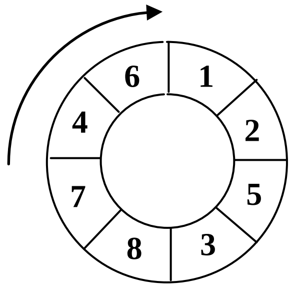



Рис.5

Сразу скажем, что пользуясь таким алгоритмом можно заполнить (упаковать) поля только определённого периода $\boldsymbol{P}$. Чему же равен период таких полей нам и предстоит выяснить.

Предположим, что в нашем распоряжении есть бесконечное клеточное поле в виде строки.

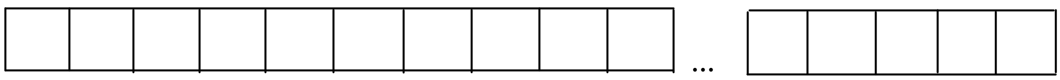


Рис. 6

Используя наш алгоритм, поместим в это поле числа от **1** до $\boldsymbol{n}$.

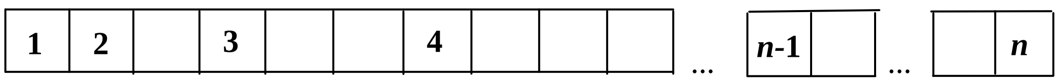



Рис. 7

Не трудно заметить, что число клеток нашего поля, не включая последнюю клетку (Рис.7), составляет сумму чисел натурального ряда от **1** до $\boldsymbol{n-1}$, т.е.

$$\frac{\mathbf{1}+(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).$$

Тогда период поля, в последней клетке которого стоит число $\boldsymbol{n}$, равен:

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}. \qquad (1)$$

Пусть имеем поле периода $\boldsymbol{P}$. Рассмотрим случай, когда два числа данного поля $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ попадают в одну клетку при заполнении поля по нашему алгоритму (имеется в виду конечно же замкнутое поле). Т. е. - это задача обратная задаче, поставленной ранее, т. к. мы ищем поля с периодом $\boldsymbol{P}$, которые не заполняются по описанному алгоритму.

Подставим в формулу (1) числа $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, получим:

$$P_1 = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + 1, \quad P_2 = \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} + 1.$$

Пусть для определённости $n_1 < n_2$, тогда $n_1 < n_2 \le P$. Если $n_1$ и $n_2$ попадают в одну клетку при заполнении нашего поля, то

$$P_2 - P_1 = q \cdot P,$$

где $q$, - целое число. Т. е. разность $P_2 - P_1$ должна быть кратна периоду нашего исходного поля.

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2P} = q. \qquad (2)$$

Формула (2) - это и есть условие,при котором замкнутое поле невозможно заполнить по нашему алгоритму.

Рассмотрим все возможные случаи для $P$.

1). Пусть $P$ - нечётное число. Заметим, что среди чисел $1$, $2$, , $P$ всегда можно подобрать два числа $n_1$ и $n_2$ такие, что $n_2 + n_1 - 1 = P$, где $n_1$ и $n_2$ оба чётные. Это очевидно. Т. е. формула (2) имеет смысл при $P$ - нечётном. Т. е. всегда существуют такие $n_1$ и $n_2$, что подставляя их в формулу (2) получаем целое значение $q$.

Т. о., поля, период которых $P$ равен нечётному числу, не заполняются по такому алгоритму.

2).Пусть $P = 2^k m$, где $m$ - нечётное.

Для доказательства незаполняемости таких полей достаточно доказать хотя бы один частный случай.

Пусть $q = 1$, тогда:

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1} m} = 1. \qquad (3)$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = 2^{k+1} \\ n_2 + n_1 - 1 = m \end{cases}.$$

$$n_1 = \frac{m + 1 - 2^{k+1}}{2}; \quad n_2 = \frac{m + 1 + 2^{k+1}}{2};$$

$n_1$ и $n_2$ будут целыми числами при $m > 2^{k+1} - 1$. Тогда возникает вопрос, существуют ли такие целые $n_1$ и $n_2$ при $m \le 2^{k+1} - 1$, для которых формула (3) была бы справедлива.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n_2 - n_1 = m} \\ \boldsymbol{n_2 + n_1 - 1 = 2^{k+1}} \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{n_1 = \frac{2^{k+1} + 1 - m}{2}; \quad n_2 = \frac{2^{k+1} + m + 1}{2}}.$$

Получаем целые $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ при $\boldsymbol{m < 2^{k+1} + 1}$. Т. к. $\boldsymbol{m}$ - нечётное, то из полученного неравенства справедливо следует неравенство:

$$\boldsymbol{m \le 2^{k+1} - 1}.$$

Остаётся рассмотреть третий случай.

3) $\boldsymbol{P = 2^k}$, т. е. формула (3) будет иметь вид:

$$\boldsymbol{\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2^{k+1}} = q}.$$

Один из сомножителей числителя всегда нечётный. Тогда для того, чтобы $\boldsymbol{q}$ было целым числом необходимо, чтобы другой сомножитель был бы по крайней мере равен $\boldsymbol{2^{k+1}}$. Число $\boldsymbol{2^{k+1}}$ в два раза превышает период $\boldsymbol{P}$, поэтому имеем: при $\boldsymbol{n_1 < n_2 \le P}$, $\boldsymbol{n_2 + n_1 - 1 < 2^{k+1}}$ и, тем более, $\boldsymbol{n_2 - n_1 - 1 < 2^{k+1}}$. Таким образом, ни при каких $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$, где $\boldsymbol{n_1 < n_2 \le P}$, $\boldsymbol{P = 2^k}$ выражение

$$\boldsymbol{\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1 - 1)}{2P}}$$

не может быть целым числом.

Т. о., выяснилось, что только поля, период которых $\boldsymbol{P = 2^k}$, могут заполняться без пробелов по нашему алгоритму.

Рассмотрим несколько следствий, вытекающих из такой упаковки клеточных полей.

***Следствие* 1.**

При любом произволе начальной клетки, одна клетка поля будет содержать свой собственный номер.

Поясним это на примере**.**

***Пример***: ***P*** = **8**.

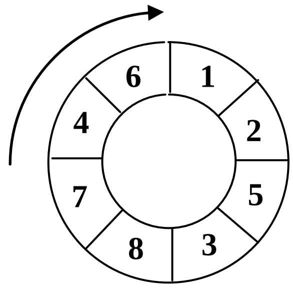
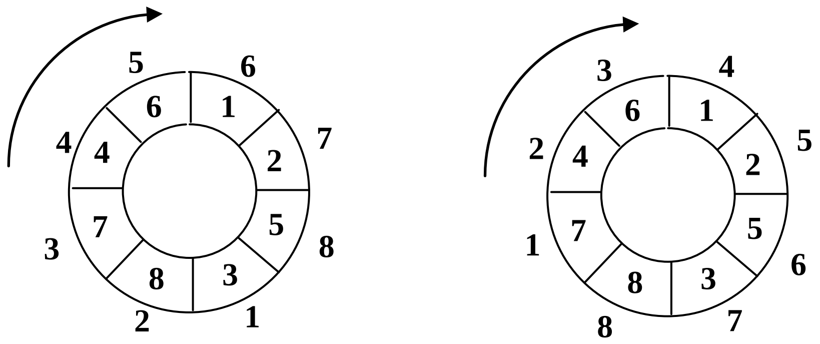



Рис. 8

Теперь пронумеруем последовательно в том же направлении клетки нашего поля. Начиная с любой произвольной клетки.




а) б)

Рис. 9

Начальной клеткой в случае Рис.9 а) мы выбрали клетку, в которой стоит число **3**. Пронумеровав клетки замечаем, что число **4** стоит в клетке, порядковый номер которой равен четырём.

Во втором случае Рис. 9 б) начальной клеткой была клетка с числом **7**. В этом случае клетка с числом **8** получила порядковый номер равный **8.**

Докажем следствие 1.

Пусть клетка, где стоит число **1**, имеет порядковый номер ***X***. Клетка с числом **2** будет иметь порядковый номер ***X*+1.** Клетка с числом **3** - (***X*** + **3**). Клетка с числом **4** - (***X*** + **6**) и т. д. Клетка с числом ***n*** будет иметь какой-то порядковый номер ***t***. Порядковый номер клетки всегда $\le P$, т. е. $t \le P$. Если число $t > P$, то мы должны записать порядковый номер равный остатку от деления числа ***t*** на ***P***, Какова общая формула для вычисления ***t*** ?

Посмотрев снова на Рис. 8, мы замечаем, что между числом **1** и числом ***n*** находится $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ клетка. Тогда, если начальная клетка имеет порядковый номер ***X***, то клетка, где стоит число ***n***, будет иметь порядковый номер $t = X + \frac{n(n-1)}{2}$.

Можем записать такое уравнение:

$$X + \frac{n(n-1)}{2} = q \cdot P + t,$$

здесь $q$ - какое-то целое число.

Определим предельные границы числа $q$. Очевидно, что минимальное значение $q = 0$. Максимальную границу для $q$ получаем при максимальных $X$ и $n$, т. е. когда $X = n = P$. Получаем:

$$P + \frac{P(P-1)}{2} = \frac{P(P+1)}{2}.$$

Разделив это выражение на $P$ получаем $\frac{P}{2} + \frac{1}{2}$. Целая часть этого выражения и есть максимальная граница для $q$, т. е.

$$0 \le q \le \frac{P}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда порядковый номер клетки с числом $n$ равен $n$ , т.е. имеем такое уравнение:

$$X + \frac{n(n-1)}{2} = q \cdot P + n,$$

или преобразовав его, получаем уравнение:

$$n^2 - 3n + 2X - 2Pq = 0. \qquad (4)$$

Это квадратное уранение, да ещё с тремя неизвестными $n$, $X$ и $q$. Причём все они должны быть целыми числами. Такие уравнения называются диофантовыми. По имени античного математика Диофанта. Существуют методы исследования таких уравнении, но это выходит за рамки нашей книги, поэтому мы изберём другой путь для доказательства следствия 1.

Сначала решим такую задачу.

Предположил, что у нас есть замкнутое клеточное поле, заполненное по правилам нашего алгоритма. Например поле, как на Рис. 8. Выясним, существуют ли в этой расстановке чисел два числа $n$ и $(n + k)$, удалённые друг от друга на $(k - 1)$ клетку. Т. е. если двигаться по часовой стрелке (для заполнения замкнутого поля договоримся всегда выбирать это направление) от числа $n$ к числу $(n + k)$, то мы насчитаем между ними $(k - 1)$ клетку. Точно такое же расстояние (количество чисел) числа $n$ и $(n + k)$ меют в натуральном ряде чисел.

Предположим, что у нас есть достаточно длинное клеточное поле. Поставим в первую его клетку число $n$ и, используя алгоритм упаковки (АУ), впишем в это поле числа $(n + 1)$, $(n + 2)$, ... , $(n + k)$.

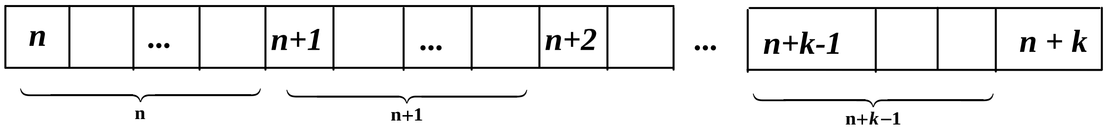



Рис. 10

Вычислим, используя формулу для суммы арифметической прогрессии, сколько клеток имеется в этом поле до клетки с числом ($\boldsymbol{n + k}$).

$$\frac{n+(n+k-1)}{2}k = \frac{(2n+k-1)k}{2}.$$

Тогда очевидно, что между клеткой с числом $\boldsymbol{n}$ и клеткой с числом ($\boldsymbol{n + k}$) имеется $\frac{(2n+k-1)k}{2} - 1$ клетка. Вычтем из этого выражения число ($\boldsymbol{k}$ - **1**), получим:

$$\frac{k(2n+k-3)}{2}. \qquad (5)$$

При каких $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{n}$ выражение (5) будет кратно периоду $\boldsymbol{P}$ нашего замкнутого поля? Сразу заметим, что при $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\kappa}$ =**1** выражение (5) равно нулю, т.е. является кратным для любого периода Р. Т. е. числа $\boldsymbol{n}$ = **1** и $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\kappa}$ =**2** стоят в нашем поле точно также как они стоят в натуральном ряде чисел. И это всегда так согласно (АУ). Существуют ли другие числа?

Число $n < P$, число $n + k \le P$ .Очевидно, что $k < P$. Перепишем выражение (5) таким образом:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2}.$$

Тогда справедливо такое неравенство:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2} < \frac{P(2P-3)}{2} < P^2.$$

Поделив каждую часть этого неравенства на $\boldsymbol{P}$ получаем:

$$\frac{k(n+(n+k)-3)}{2P} < \frac{2P-3}{2} < P.$$

А это значит, что выражение (5) ни при каких $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ не может быть кратно $\boldsymbol{P}$. За исключением случая $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\kappa}$ =**1.** Следовательно и чисел $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\kappa}$**,** удалённых друг от друга на расстояние ($\boldsymbol{k}$ - **1**) клетка, в нашей расстановке не существует.

Теперь вернёмся к доказательству ***Следствия*** 1.

Пойдём обратным путём. Пусть клетка с числом $\boldsymbol{n}$ имеет порядковый номер $\boldsymbol{n}$. Отталкиваясь от этого номера пронумеруем остальные клетки. Идя по часовой стрелке от номера $\boldsymbol{n}$ будем присваивать номера ($\boldsymbol{n}$ + **1**), ($\boldsymbol{n}$ + **2**), ... ,$\boldsymbol{P}$**,** а идя против часовой стрелки - ($\boldsymbol{n}$ - **1**), ($\boldsymbol{n}$ - **2**), ... ,**1** .Т. е. всегда будем иметь клетку с каким-то числом, у которой порядковый номер **1**. Пример: $\boldsymbol{n}$ =**3**, $\boldsymbol{P}$ **= 8** .

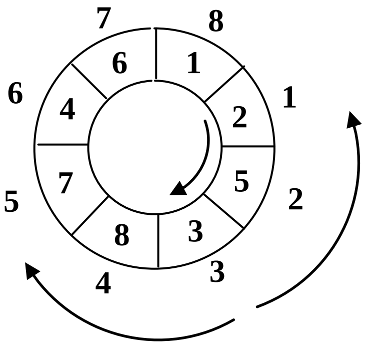



Рис. 11

Т. е., начиная нумерацию с клетки с числом **2,** получим картину, как на Рис.11, где клетка с числом **3** имеет порядковый номер **3**.

Может ли быть такая ситуация? Клетка с числом $\boldsymbol{n}$ и клетка с числом ($\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}$) имеют порядковые номера $\boldsymbol{n}$ и ($\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}$) соответственно. Только, что мы доказали, что этого быть не может, за исключением, когда нумерация клеток начинается с клетки с числом **1.** В этом случае клеткам с числами **1** и **2** будут присвоены их собственные порядковые номера. Т. о., для любого $\boldsymbol{n}$ всегда найдётся клетка с числом $\boldsymbol{m}$, такая, что начиная с этой клетки нумерацию, получим для клетки с числом $\boldsymbol{n}$ порядковый номер $\boldsymbol{n}$.

Однако заметим, что у нас различных чисел $\boldsymbol{n = P}$, но клеток с числом $\boldsymbol{m}$ мы получили $\boldsymbol{P}$-**1**, т. к. в двух случаях при $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ и $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$ получаем одну и туже нумерацию клеток нашего поля.

Иначе говоря, следствие 1 имеет при каком-то $\boldsymbol{m}$ исключение, т.е. имеется такая нумерация клеток, что ни одна клетка не имеет порядкового номера, равного числу, которое стоит в этой клетке.

Действительно: при $\boldsymbol{X = \frac{P}{2} + 1}$, $\boldsymbol{q = \frac{P}{2}}$ получаем такие решения уравнения (4):

$$\boldsymbol{n_1 = P + 1; \qquad n_2 = -P + 2.}$$

Но $\boldsymbol{1 \le n \le P}$, т. е. ни одно решение нас не удовлетворяет.

***Следствие*** 1 доказано.

***Следствие* 2.**

Сумма чисел, стоящих в клетках, разность порядковых номеров которых равна $\boldsymbol{\frac{P}{2}}$, постоянна и равна $\boldsymbol{P} + \mathbf{1}$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это следствие. Наше доказательство мы покажем чуть позже, а сейчас рассмотрим клеточные поля, имеющие период $\boldsymbol{P = 2^{2k}}$. Такие поля можно представлять в виде квадратов.

***Пример***: $\boldsymbol{P = 2^k}$, $\boldsymbol{k = 4}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Рис. 12

Заполнять числами такие поля используя (АУ) будем построчно слева-направо и от строки к строке переходя сверху вниз. Договоримся считать также, что за последней правой нижней клеткой идет следом левая верхняя, т.е. наше квадратное поле будем считать тоже замкнутым.

Пронумеруем наше поле от **1** до ***P***, начиная с любой клетки.

***Пример***: $\boldsymbol{\frac{P}{2} = 8}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **12** | **13** | **14** | **15** |
| **16** | **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** | **7** |
| **8** | **9** | **10** | **11** |

Рис. 13

Заметим, что клетки, разность порядковых номеров которых равна $\boldsymbol{\frac{P}{2} = 8}$, стоят в одном и том же столбце. Например **5**-ая и **13**-ая клетка находятся во втором столбце. Очевидно, что как бы мы не смещали нумерацию клеток, это всегда будет так.

Т.о., заполнив такое поле по правилам (АУ) мы получим квадрат, сумма чисел по столбцам у которого всегда будет постоянной согласно следствия 2.

***Пример***:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5** | **14** | **8** | **10** |
| **13** | **6** | **1** | **2** |
| **12** | **3** | **9** | **7** |
| **4** | **11** | **16** | **15** |

Рис. 14

При определённой сноровке, меняя местами числа, стоящие в стобцах, можно получить магический квадрат.

***Пример***:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 14 | 8 | 10 |
| 13 | 6 | 1 | 2 |
| 12 | 3 | 9 | 7 |
| 4 | 11 | 16 | 15 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 14 | 8 | 7 |
| 13 | 6 | 16 | 2 |
| 4 | 11 | 9 | 10 |
| 12 | 3 | 1 | 15 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 14 | 8 | 7 |
| 13 | 3 | 16 | 2 |
| 4 | 11 | 9 | 10 |
| 12 | 6 | 1 | 15 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 14 | 8 | 7 |
| 13 | 3 | 16 | 2 |
| 12 | 6 | 1 | 15 |
| 4 | 11 | 9 | 10 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 14 | 9 | 7 |
| 13 | 3 | 16 | 2 |
| 12 | 6 | 1 | 15 |
| 5 | 11 | 8 | 10 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 14 | 1 | 7 |
| 13 | 3 | 16 | 2 |
| 4 | 6 | 9 | 15 |
| 5 | 11 | 8 | 10 |

Магический квадрат

Рис. 15

В данном примере нам понадобилось провести пять замен, чтобы получить магисекий квадрат. В первой замене мы поменяли местами числа **12** и **4**, **3** и **11**, **1** и **16**, **7** и **10**. Во второй – **6** и **3**. В третьей замене поменяли местами строки **3** и **4**. Затем местами обменялись числа **4** и **5**, **8** и **9**. И в последнем случае меняем местами числа **4** и **12**, **1** и **9**.

Мы думаем, что читатель уже справился с доказательством следствия 2 и теперь может сравнить его с нашим доказательством.

Доказательство ***Следствия*** 2.

Представим, что у нас имеется достаточно длинное не замкнутье клеточное поле, такое что мы можем упаковать в него от **1** до ***P*** чисел, используя (АУ).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | 3 | | | 4 | | | | 5 | ... | ***P***-1 | | ... | ***P*** |

Рис.16

Число клеток такого поля равно:

$$\frac{1+(P-1)}{2}(P-1)+1=\frac{P(P-1)}{2}+1. \qquad (6)$$

Если $P=2^k$, то,взяв замкнутое поле периода ***P***,по правилам (АУ) можно упаковать в него от **1** до ***P*** чисел. Нас интересует какой порядковый номер будет иметь клетка с числом ***P,*** если нумерацию начать с клетки, где стоит число **1**. Очевидно, что разделив значение выражения (6) на $P$, мы в остатке получим число, которое и является порядковым номером клетки с числом $P$. Преобразуем выражение (6) таким образом:

$$\frac{P(P-1)}{2}+1=\frac{P^2-P+2}{2}=\frac{(P^2-2P)+2P-P+2}{2}=\frac{P(P-2)+P+2}{2}.$$

Разделив его на $P$ получаем:

$$\frac{P-2}{2}+\frac{\frac{P}{2}+1}{P}.$$

Число $\frac{P-2}{2}$ всегда целое, $\frac{P}{2}+1<P$. Следовательно остатком от деления выражения (6) на $P$ будет число $\frac{P}{2}+1$ - порядковый номер клетки с числом $P$. Разность порядковых номеров клеток, где стоят числа $1$ и $P$ равна $\frac{P}{2}$, а сумма этих чисел равна $P+1$. Т.е. для чисел $1$ и $P$ следствие 2 справедливо. Мы помним, что начинали нумерацию с клетки с числом $1$. Рассмотрим снова поле Рис.16.

Где-то в нём стоят числа $k$ и $P$-$k$+$1$. Мы считаем, что это поле уже заполнено по правилам (АУ). Определим, сколько данное поле будет иметь клеток от клетки с числом $k$ до клетки с числом $P$-$k$+$1$, включая их самих.

$$\frac{(k+P-k)(P-2k+1)}{2}+1=\frac{P(P-2k+1)+2}{2}=\frac{P(P-2k)+P+2}{2}.$$

Поделив это выражение на $P$ получим в остатке $\frac{P}{2}+1$. Если нумерацию замкнутого поля начать с клетки с числом $k$, то клетка с числом $P$-$k$+$1$ будет иметь порядковый номер $\frac{P}{2}+1$ Очевидно, что как бы мы не смещали нумерацию клеток, разность порядковых номеров клеток с числами $k$ и $P$-$k$+$1$ всегда остаётся $\frac{P}{2}$. Это и доказывает справедливость следствия 2.

Мы закончили рассмотрение замкнутых клеточных полей, которые заполняются по правилам (АУ) Может быть читатель захочет продолжить начатые здесь исследования. Тогда мы советуем ему попробовать разработать алгоритм перестройки квадратного поля в магический квадрат, как это было показано в примере на Рис. 15. Нам не удалось найти такого общего алгоритма, а может быть, его и не существует. Предлагаем это выяснить читателю.

## 2 Поразрядные упаковки

Теперь приступим к рассмотрению ещё одной упаковки. Начнём с конкретного примера. Покажем все числа от 0 до 7 включительно двоичной системы счисления, т. е. системы, где используются всего две цифры 0 и 1. для представления чисел. Т. к. максимальное здесь число 7 в двоичной системе счисления имеет три разряда ( 111 ), то и другие числа мы дополнили спереди нулями, чтобы не нарушать значения разрядности.

$$\mathbf{0 - 000, 1 - 001, 2 - 010, 3 - 011, 4 - 100, 5 - 101, 6 - 110, 7 - 111.}$$

Рассмотрим замкнутое клеточное поле, в каждую клетку которого по какому-то закону, пока нам неизвестному, поставлена какая-то цифра двоичной системы счисления, либо **0**, либо **1.**

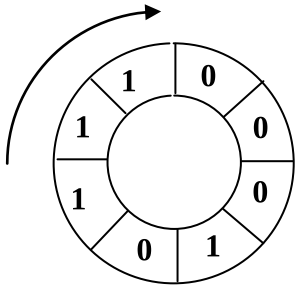



Рис. 17

Будем выписывать последовательные тройки цифр из этого поля, двигаясь по часовой стрелке. Начинать можно с любой клетки. Пусть зто будет клетка под номером **1**, как показано на Рис.17.

Первая тройка цифр даст число **101**. Сместившись на одну клетку по часовой стрелке, выпишем следующую тройку. Это число **011**. И т. д.. Далее получаем: **111, 110, 100, 000, 001, 010**. Как видим, мы получили пзрвые 8 чисел от 0 до 7 двоичной системы счисления. Т. о., на Рис.17 представлено 8-клеточное поле, в котором некоторым хитрым образом упакованы цифры двоичной системы счисления, которые последовательно образуют первые 8 чисел этой системы счисления.

Введём обозначения трёх характеристик нашего замкнутого поля: $\boldsymbol{K}$ - количество клеток в поле, $\boldsymbol{P}$ - основание системы счисления, $\boldsymbol{n}$ - разрядность чисел, упакованных в данном поле. Для каждого поля $\boldsymbol{n}$ - всегда является константой. В данном примере $\boldsymbol{n} = \mathbf{3}$.

Оказывается, что $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{n}$ связаны простым, соотношением:

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{K}\,. \tag{7}$$

Действительно, предположим, что в поле из $\boldsymbol{K}$ клеток упакованы все числа от **0** до $\boldsymbol{K} - \mathbf{1}$ $\boldsymbol{P}$- ичной системы счисления. Обозначим элементы этой системы счисления (СС) через $\boldsymbol{q}_i$ **:**

$$\{\boldsymbol{q}_1;\ \boldsymbol{q}_2;\ \dots;\boldsymbol{q}_P;\}.$$

В десятичной системе счисления элементы $\boldsymbol{q_i}$ называются цифрами. Предположим, что в данном поле упакованы числа, разрядность которых равна $\boldsymbol{n}$.

Тогда максимальное число имеет вид: $\underbrace{\boldsymbol{q_p; q_p; \dots q_p}}_{n}$. Это и есть число $\boldsymbol{K - 1}$. Т. е. можем записать:

$$\boldsymbol{K - 1 = q_p\left(P^{n-1} + P^{n-2} + \dots + P + 1\right).}$$

Выражение в скобках ни что иное, как геометрическая прогрессия, сумму которой мы можем вычислить.

$$\boldsymbol{1 + P + P^2 + \dots + P^{n-2} + P^{n-1} = \frac{P^n - 1}{P - 1};}$$

$$\boldsymbol{K - 1 = \frac{P^n - 1}{P - 1}.}$$

Но $\boldsymbol{q_P = P - 1}$. Это справедливо для любой (СС). Отсюда: $\boldsymbol{K - 1 = P^n - 1}$ и $\boldsymbol{P^n = K}$.

Т.о., предположив, что такая упаковка существует, мы доказали, что она должна состоять из $\boldsymbol{P^n}$ клеток, где $\boldsymbol{P}$ - основание (СС), $\boldsymbol{n}$ - разрядность чисел.

Теперь докажем существование такой упаковки. Составим ряд из чисел от $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{P^n - 1}$.

$$\underbrace{\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n},\ \underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n-1}\boldsymbol{1},\ \dots,\ \underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n-1}\boldsymbol{0},\ \dots,\ \underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n}}_{P^n} \tag{8}$$

Всего $\boldsymbol{P^n}$ чисел. Каждое число имеет разрядность равную $\boldsymbol{n}$.

Выберем произвольно начальную клетку поля. Поместим в первые $\boldsymbol{n}$ клеток число $\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n}$, а в последние $\boldsymbol{n}$ клеток число $\underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n}$.

Вычеркнем из ряда (8) числа: $\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n}$, $\boldsymbol{q_P}\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n-1}$, $\boldsymbol{q_P q_P}\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n-2}$, ..., $\underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n-1}\boldsymbol{0}$, $\underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n}$, т. к. они уже упакованы в нашем поле. Всего $\boldsymbol{n + 1}$ число. Разрежем наше поле на границе чисел $\underbrace{\boldsymbol{0\dots0}}_{n}$ и $\underbrace{\boldsymbol{q_P\dots q_P}}_{n}$ и представим его в виде строки, состоящей из клеток. Мы будем двигаться по ней слева направо.

$$\underbrace{\boxed{\boldsymbol{0}}\boxed{\boldsymbol{\dots}}\boxed{\boldsymbol{0}}}_{\mathbf{n}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\boldsymbol{\dots}}\boxed{\phantom{0}}\underbrace{\boxed{\boldsymbol{q_P}}\boxed{\boldsymbol{\dots}}\boxed{\boldsymbol{q_P}}}_{\mathbf{n}}$$

Рис. 18

Для заполнения этого поля используем следующий алгоритм. Назовём его алгоритмом "наименьшего следующего" или сокращённо (НС). Выберем наименьшее число из ряда (8), которое может стоять за числом $\underbrace{\mathbf{0...0}}_{n}$ и ещё не вычеркнуто. Это число $\underbrace{\mathbf{0...0}}_{n-1}\mathbf{1}$. Вписываем в очередную клетку поля цифру **1** и вычёркиваем число $\underbrace{\mathbf{0...0}}_{n-1}\mathbf{1}$ из ряда (8). И т.д..

Предположим, что следуя такому алгоритму, невозможно упаковать все числа ряда (8). Это значит, что на некотором этапе упаковки поля будет стоять число $\boldsymbol{N}$, такое, что добавляя справа любой элемент (цифру) $\boldsymbol{q_i}$ мы не получим числа, которое бы ещё не было вычеркнуто из ряда (8). Другими словами:

Пусть число $\boldsymbol{N = a_1 a_2 ... a_n}$, где $\boldsymbol{a_i} \in \left\{ \boldsymbol{q_1; q_2; ...; q_P} \right\}$. Из этого следует, что все числа $\boldsymbol{a_2 ... a_n q_1}$, $\boldsymbol{a_2 ... a_n q_2}$, ..., $\boldsymbol{a_2 ... a_n q_P}$ (всего $\boldsymbol{P}$ чисел), уже вычеркнуты из ряда (8), т.е. уже имеются в нашей упаковке. Предположим, что $\boldsymbol{a_i}$ не все равны между собой, тогда ни одно из чисел $\boldsymbol{a_2 ... a_n q_i}$ не совпадает с числом $\boldsymbol{N}$, а расположены где-то перед ним. Но тогда, следовательно, в поле также стоят и числа $\boldsymbol{q_1 a_2 ... a_n}$, $\boldsymbol{q_2 a_2 ... a_n}$, ..., $\boldsymbol{q_P a_2 ... a_n}$ (всего $\boldsymbol{P}$ чисел) и ещё число $\boldsymbol{N = a_1 a_2 ... a_n}$ - последнее. Но это значит, что в ряду (8) находилось, по крайней мере, два одинаковых числа, т. к. $\boldsymbol{a_i} \in \left\{ \boldsymbol{q_1; q_2; ...; q_P} \right\}$, а это противоречит условию построения ряда (8).

Рассмотрим другую ситуацию, когда элементы $\boldsymbol{a_i}$ все равны между собой, т. е. $\boldsymbol{N = a_i a_i ... a_i}$, $\boldsymbol{a_i \neq q_P}$ т.к. число $\underbrace{\boldsymbol{q_P ... q_P}}_{n}$ уже стоит в поле, т.е. $\boldsymbol{0 < a_1 < q_P}$. Тогда где-то впереди должно стоять число $\boldsymbol{a_i ... a_i q_P}$, т. к. мы предположили, что за числом $\boldsymbol{N}$ поставить уже ничего не возможно. Но это будет противоречить алгоритму (НС), т. к. число $\underbrace{\boldsymbol{a_i ... a_i}}_{n-1}\boldsymbol{q_P} > \underbrace{\boldsymbol{a_i ... a_i}}_{n}$. Следовательно, предположение о невозможности существования такой упаковки не верно. Т.о. мы доказали существование упаковки. Этим также доказывается и справедливость алгоритма (НС).

Теперь можно сформулировать общую ***теорему***:

*Если дана система счисления с основанием* $\boldsymbol{P}$ *, то* $\boldsymbol{K}$ *последовательных чисел от* ***0*** *до* ***K - 1*** *этой системы счисления, представленных* **n** *разрядами, можно упаковать в замкнутое клеточное поле, состоящее из* $\boldsymbol{K}$ *клеток, причём, одной клетке соответствует один разряд числа и* $\boldsymbol{K = P^n}$.

Для примера составим ещё одну упаковку для $\boldsymbol{P} = \mathbf{10}$, $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$.

Такое поле должно состоять $\boldsymbol{K = P^n = 10^2 = 100}$ клеток. Для удобства представим поле в виде строк, по двадцать клеток в каждой Рис. 19.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 | 6 | 0 | 7 | 0 | 8 | 0 | 9 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 | 7 | 1 | 8 | 1 | 9 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 5 | 2 | 6 | 2 | 7 | 2 | 8 | 2 | 9 | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 | 3 | 7 |
| 3 | 8 | 3 | 9 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 | 4 | 7 | 4 | 8 | 4 | 9 | 5 | 5 | 6 | 5 | 7 |
| 5 | 8 | 5 | 9 | 6 | 6 | 7 | 6 | 8 | 6 | 9 | 7 | 7 | 8 | 7 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 |

Рис. 19

В этом поле упакованы числа десятичной системы счисления от **00** до **99**.

Замкнутое клеточное поле удобно представлять в виде орграфа. И, анализируя такой граф, можно оценить, единственным ли образом можно заполнить данное поле.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть нам необходимо построить упаковку для двоичной системы счисления $(\boldsymbol{P}=2)$ и двухразрядных чисел ($\boldsymbol{n}$ = **2** ). Т. е. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{P}^{n}=\mathbf{4}$. Значит, в нашем поле из 4-х клеток должны стоять числа от **0** до **3**, а именно: **00**, **01**, **10**, **11**.

Число **00** может соседствовать с числом **00** либо **01**. Число **01** -с числом **10** либо **11**. Число **10** - с числом **00**, либо **01**. А число **11** – с числом **10** либо с числом **11**.

Если слово «соседствовать» заменить стрелочкой, то можно построить такой орграф (ориентированный граф).

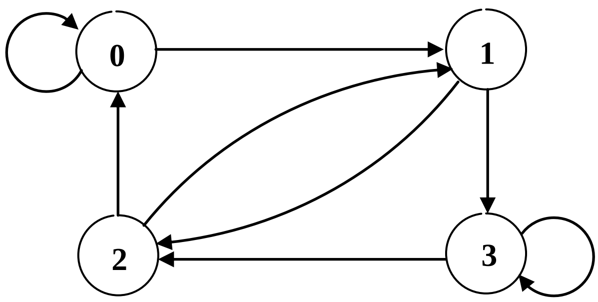



Рис. 20

Здесь **0 - 00**, **1 - 01**, **2 - 10**, **3 – 11**. Структура, показанная на Рис. 20 и называется орграфом.

Чтобы теперь построить интересующую нас упаковку, необходимо отыскать на данном орграфе гамильтонов путь. Т. е. замкнутый путь обхода по всем вершинам графа. При этом в каждой вершине надо побывать один раз и вернуться в исходную вершину. В данном случае - это можно сделать единственным образом: **0→1→3→2→0**.

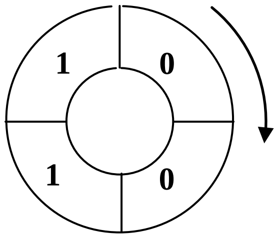



Рис.21

Эта упаковка соответствует алгоритму (НС).
Построим орграф для случая ***P* = 2, *n* = 3, *К* = 8**.

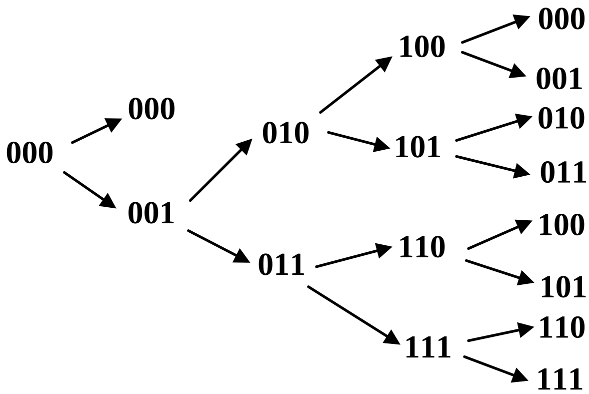



Рис. 22

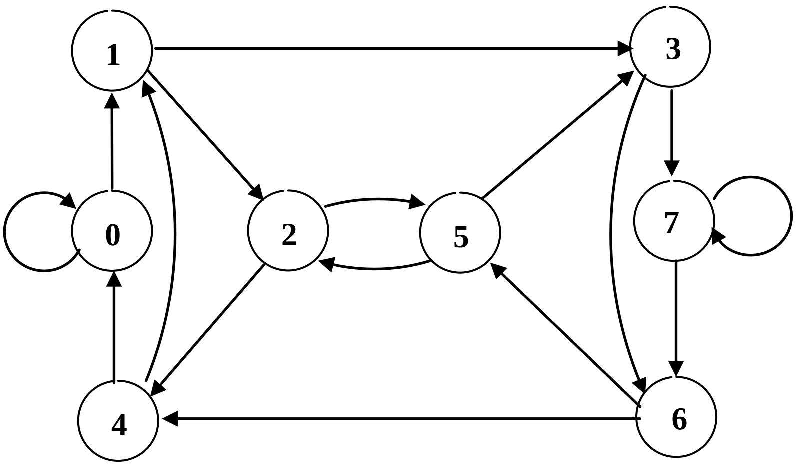



Рис. 23

Для такого графа существует два гамильтонгшых пути:

**0→1→2→5→3→7→6→4→0,**

**0→1→3→7→6→5→2→4→0.**

Т. о., поле из 8 клеток можно упаковать двумя способами, первый из которых и есть упаковка по алгоритму (НС).

С увеличением $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{n}$ число гамильтоновых путей на орграфе резко возрастает. Причём, какой-то явной закономерности числа путей от $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{n}$, по крайней мере, на первый взгляд заметить не удаётся. Может быть, это удасться сделать читателю.

Дри $\boldsymbol{P} = \mathbf{2}, \boldsymbol{n} = \mathbf{4}$ мы получаем уже 16 гамильтоновых путей, а при $\boldsymbol{P} = \mathbf{3}, \boldsymbol{n} = \mathbf{2}$ их уже будет 24.

Рекомендуем читателю самостоятельно построить соответствующие орграфы.

В заключение докажем одну небольшую теорему о сумме чисел, упакованных в замкнутом клеточном поле.

***Теорема*:**

*Если дано замкнутое клеточное поле и направление его обхода. И в каждую клетку данного поля вписан произвольный элемент* $\boldsymbol{a_i} \in \left\{\mathbf{0};\mathbf{1};\ldots;\boldsymbol{q_P}\right\}$, $\boldsymbol{P}$ *- ичной системы счисления, то сумма чисел, каждое из которых представлено в данном поле* $\boldsymbol{n}$ *последовательными элементами, вычисляется по формуле:*

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{P} - \mathbf{1}}\left(\boldsymbol{P}^n - \mathbf{1}\right), \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{K}$ – количество клеток в поле (Рис. 24).

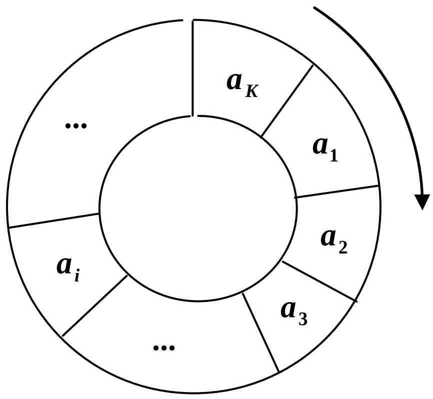



Рис. 24

Доказательство:

Составим выражение для суммы чисел в данном поле:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{P}^{n-1} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{P}^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{a}_n +$$

$$+ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{P}^{n-1} + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{P}^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{P} + \boldsymbol{a}_{n+1} + \ldots +$$

$$+ \boldsymbol{a}_{K-n+1}\boldsymbol{P}^{n-1} + \boldsymbol{a}_{K-n+2}\boldsymbol{P}^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a}_{K-1}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{a}_K + \ldots +$$

$$+ \boldsymbol{a}_K\boldsymbol{P}^{n-1} + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{P}^{n-2} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{P}^{n-3} + \ldots + \boldsymbol{a}_{n-2}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{a}_{n-1}.$$

После перегруппировки и приведения подобных членов, получаем:

$$S = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right) \cdot \left(P^{n-1} + P^{n-2} + \ldots + P + 1\right).$$

Второй сомножитель представляет собой геометрическую прогрессию из $n$ членов. Сумма такой прогрессии равна $\frac{P^n - 1}{P - 1}$. Окончательно получаем:

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{P - 1}\left(P^n - 1\right).$$

Что и требовалось доказать.

***Пример***: Пусть дано поле из 9-ти клеток. $P$ **= 10,** $n$ **= 2**.

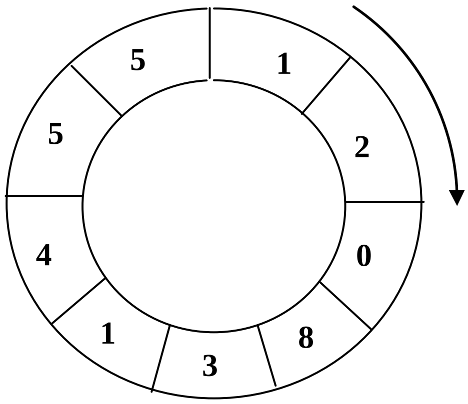



Рис. 25

Выпишем числа, упакованные в данном поле, и найдём их сумму.

$$S = 12 + 20 + 08 + 83 + 31 + 14 + 45 + 55 + 51 = 319.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой (9), можно получить сумму этих чисел не выписывая сами числа.

$$S = \left(1 + 2 + 0 + 8 + 3 + 1 + 4 + 5 + 5\right)\frac{10^2 - 1}{10 - 1} = 319.$$

***Пример упаковки при***:
***n*** = 4, ***P*** = 2, ***K*** = 16

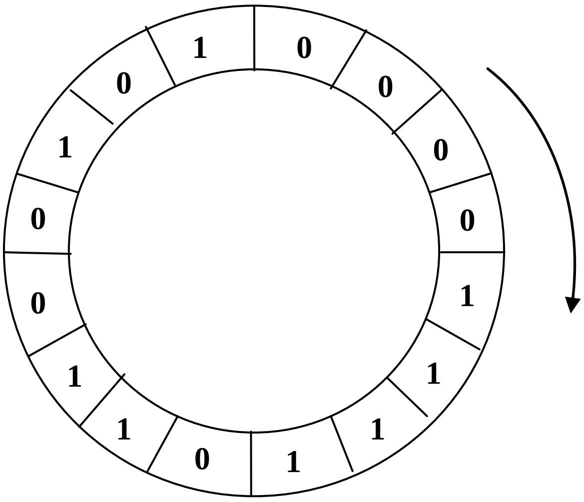



Рис. 26

***Пример упаковки при***:
***n*** = 5, ***P*** = 2, ***K*** = 32

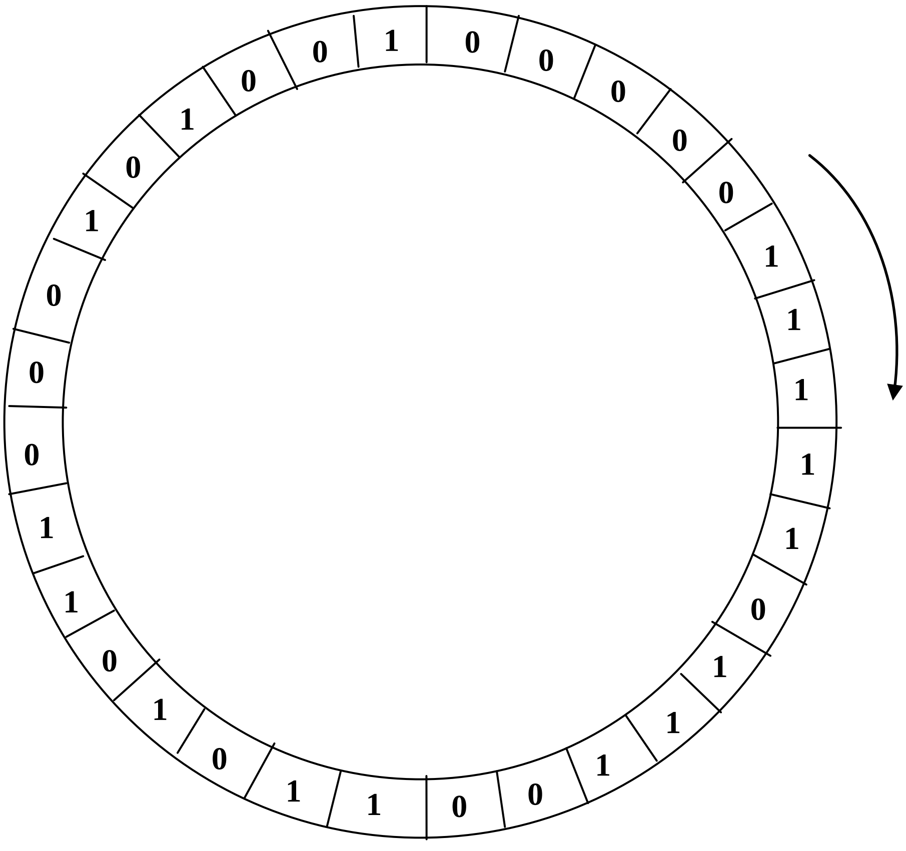



Рис. 27

# 3 Упаковки и простые числа

А сейчас познакомимся с ещё одним алгоритмом, при помощи которого можно упаковать тоже замкнутое клеточное поле.

Рассмотрим такое клеточное поле.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | **2** | | | | | **3** | | | | | | | | |

Рис. 28

Здесь между числом $\boldsymbol{n}$ и числом $\boldsymbol{n}$ **+1** имеется ровно $\boldsymbol{n}^2$ клеток. Выведем формулу для определения места числа $\boldsymbol{n}$ на таком поле.

Число **1** стоит на первом месте. Число **2** стоит на месте $\mathbf{1+1^2+1}$. Число **3** стоит на месте $\mathbf{1+1^2+1+2^2+1}$. Число **4** стоит на месте $\mathbf{1+1^2+1+2^2+1+3^2+1.}$

Легко просматривается зависимость:

$$\boldsymbol{n \xrightarrow{f(n)} n+\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)}.$$

Для суммы ряда $\mathbf{1^2+2^2+3^2+\ldots+\boldsymbol{n}^2}$ известна формула

$$\boldsymbol{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \qquad (10)$$

Подставим в это выражение вместо $\boldsymbol{n}$ число $\boldsymbol{(n-1)}$, получим:

$$\boldsymbol{\frac{(n-1)(n+1-1)(2n-2+1)}{6}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$$

А из этого получаем такую формулу:

$$\boldsymbol{f(n)=n+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \qquad (11)$$

Т. е. имеем такой ряд: **1, 3, 8, 18, 35, 61, 98, 148, 213, 295, 396, 518, ...**

Разделим каждый член этого ряда на **11** и построим новый ряд остатков от деления в соответствии с первым рядом.

**1, 3, 8, 7, 2, 6, 10, 5, 4, 9, 11, 1, ...**

Как видим, первые одиннадцать членов этого ряда - это числа от **1** до **11**. Т. о., если взять замкнутое клеточное поле из 11 клеток и вписать в него числа от **1** до **11**, в соответствии с местом, указанным вторым рядом (т. е. $\mathbf{1\to 1, 2\to 3, 3\to 8, 4\to 7, \ldots, 11}$ , **11** на 11-ом месте), то получим такую картину:

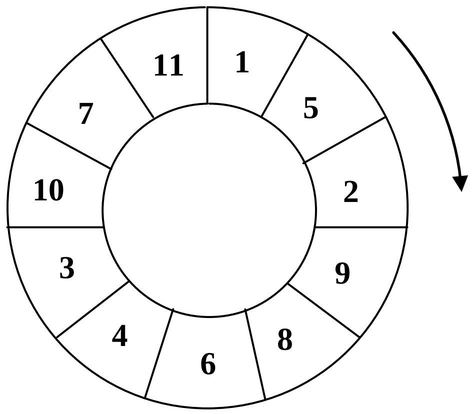



Рис. 29

Здесь между числом $n$ и числом $n+1$ расположено ровно $n^2$ клеток (т. е. если например после числа **5** отсчитать **25** клеток, идя по часовой стрелке, то следующей клеткой будет клетка с числом **6**).

Мы видим, что числа **1, 6, 11** стоят на своих местах. Это не трудно доказать. Для этого надо решить уравнение:

$$11k+n=n+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

или

$$11k=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Это тоже диофантово уравнение, а решать мы их не умеем. Но среди 11-ти чисел не трудно сделать визуальную проверку подставлял по очереди вместо $n$ числа от **1** до **11**: при $n = 1$ получаем $k = 0$ , при $n = 6$ получаем $k = 5$ , $n = 11$ получаем $k = 35$. Вычислим разность $f(n+11)-f(n)$.

$$n+11+\frac{(n+11)(n+10)(2n+21)}{6}-n-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=11(n^2+10n+36).$$

Т. е. получаем число кратное 11-ти. А это значит, что ряд остатков периодичен через 11 чисел. Отсюда следует, что в замкнутое поле из 11-ти клеток можно упаковать любую последовательность натуральных чисел начиная от числа $n$ и кончая числом $n + 11$, так, чтобы расстояние между $k$ и $(k + 1)$ числом было $k^2$ клеток.

Подметим ещё одну особенность поля, показанного на Рис. 29. Если клетку с числом **1** считать за начало кольца, то сумма чисел, стоящих в клетках, равноудалённых от начала и конца поля, будет постоянна и равна **l + 11 = 12.**

Заметим, что по такому алгоритму можно упаковать замкнутые поля из 3 и 4 клеток. Но эти поля отличаются от полл с 11-ю клетками тем, что они не "замкнуты". Т. е. максимальное число поля не попадает в клетку с максимальным порядковым номером. Если после клетки с числом **3** пропустить **9** клеток, то мы получим клетку с числом **2**, а не клетку с числом **1**, как это получается для поля с 11-ью клетками. И точно так же обстоит дело с полем из 4 клеток. Советуем читателям убедиться в этом самостоятельно.

Существует бесконечно много полей, заполняющихся по такому алгоритму. Попробуйте отыскать какие-нибудь из них. Вручную эта задача очень трудоёмка. Но если привлечь компьютер, то это здорово облегчит ваш труд.

А теперь попробуем дать для рассмотренной упаковки общую теорию.

Сначала несколько определений.

***Определение*** 1: Замкнутым клеточным полем порядка ***K*** будем называть геометрическое кольцо, разделённое на ***K*** частей (клеток), каждая из которых имеет свой порядковый номер в соответствии с данным направлением обхода (Рис. 30).

***Пример*** 1

***K*** **= 5**

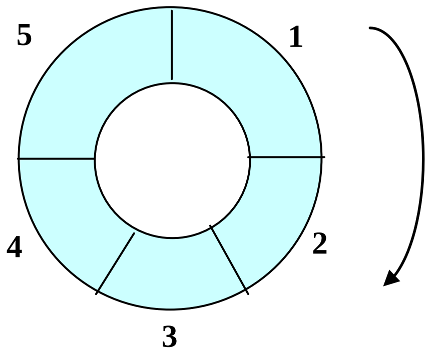



Рис. 30

***Определение*** 2: Упаковкой порядка ***K*** будем называть замкнутое клеточное поле порядка ***K***, каждая клетка которого содержит одно и только одно из чисел от 1 до ***K*** (Рис. 31).

***Пример*** 2

***K*** **= 5**

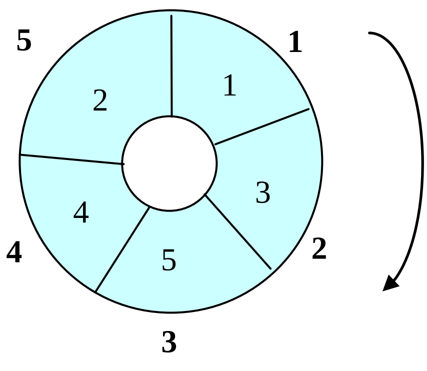



Рис. 31

Наша задача: для данного клеточного поля найти нетривиальный алгоритм заполнения, чтобы получить упаковку данного порядка (см. ***Пример*** 2, Рис. 31).

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{L}$, данную формулой (12)

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{n}. \qquad (12)$$

***Определение*** 3: Алгоритмом $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{n})$ заполнения упаковки порядка $\boldsymbol{K}$ будем называть функцию (12), где $\boldsymbol{k}$ пробегает значения чисел от 1 до $\boldsymbol{K}$, а $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N} = \{1,2,...,\infty\}$, причём для данной упаковки $\boldsymbol{n}$ = ***const*** (в ***Примере*** 2: $\boldsymbol{n}$ = 2 ).

***Определение*** 4: Расстоянием $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{k})$ будем называть число клеток упаковки, которое следует пропустить (внезависимости от того, пуста клетка или уже заполнена) после числа $\boldsymbol{k}$, следуя направлению обхода, чтобы в следующую клетку поставить число $\boldsymbol{k+1}$.

***Пример*** 3: Для упаковки ***Примера*** 2 и алгоритма упаковки (12) при $\boldsymbol{k=3}$ и $\boldsymbol{n=2}$ будем, например, иметь $\boldsymbol{L(3)=11}$ ($\boldsymbol{L(3)=3^2+2=11}$). Это означает, что мы дожны пропустить 11 клеток после клетки, где стоит число 3, двигаясь по замкнутому полю в направлении обхода, и в следующей, после этого, клетке поставить число 4 (Рис. 31).

Заполнение упаковки начинается с любой клетки поля, в которую мы ставим число 1 (вообще заполнение можно начинать с любого числа $\boldsymbol{k \le K}$ , см. ***Свойство*** 2, стр. 28).

Введём обозначение для упаковок в общем виде: $\boldsymbol{U_K}$ . Упаковку порядка $\boldsymbol{K}$ = 17, например, будем обозначать: $\boldsymbol{U_{17}(1)}$. Число 1 в скобках обозначает, что число 1 в упаковке находится в клетке с номером 1. Если имеем упаковку $\boldsymbol{U_{17}(6)}$, то это означает, что число 1 стоит в клетке с номером 6. Очевидно, что упаковок порядка $\boldsymbol{K}$ существует ровно $\boldsymbol{K}$ штук. В зависимости от начального местоположения числа 1.

***Пример*** 4.

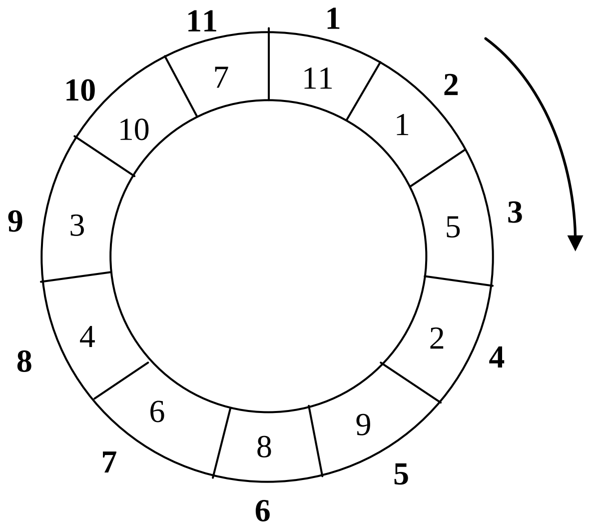



Рис. 32

На Рис. 32 показана упаковка $\boldsymbol{U_{11}(2)}$ с алгоритмом заполнения $\boldsymbol{L(K,11) = k^2 + 11}$.

Поиск упаковок – дело не простое и трудоёмкое, поэтому мы воспользовались помощью компьютера.

***Определение*** 5: Генератором поиска упаковок (ГПУ) будем называть компьютерную программу для поиска порядка упаковки в соответствии с данным алгоритмом заполнения.

Поиск порядка упаковок проводился среди первых 10000 чисел натурального ряда для каждого аргумента $\boldsymbol{n = \{1, 2, ..., 100\}}$, по алгоритму (12).

Результаты работы ГПУ для данного алгоритма сведены в ***Таблицу*** 1. В столбцах «***К***» указаны только минимальные значения, найденного порядка упаковки для подходящего конкретного ***n.***

***Таблица*** 1

| n | K | n | K | n | K | n | K | n | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 23 | 21 | 263 | 41 | 503 | 61 | 743 | 81 | 983 |
| 2 | 5 | 22 | 5 | 42 | 5 | 62 | 5 | 82 | 5 |
| 3 | 47 | 23 | 41 | 43 | 17 | 63 | 59 | 83 | 53 |
| 4 | 59 | 24 | 23 | 44 | 11 | 64 | 41 | 84 | 1019 |
| 5 | 71 | 25 | 311 | 45 | 29 | 65 | 113 | 85 | 1031 |
| 6 | 83 | 26 | 17 | 46 | 563 | 66 | 11 | 86 | 149 |
| 7 | 5 | 27 | 5 | 47 | 5 | 67 | 5 | 87 | 5 |
| 8 | 107 | 28 | 347 | 48 | 587 | 68 | 827 | 88 | 11 |
| 9 | 17 | 29 | 359 | 49 | 599 | 69 | 839 | 89 | 83 |
| 10 | 131 | 30 | 53 | 50 | 47 | 70 | 23 | 90 | 1091 |
| 11 | 11 | 31 | 383 | 51 | 89 | 71 | 863 | 91 | 1103 |
| 12 | 5 | 32 | 5 | 52 | 5 | 72 | 5 | 92 | 5 |
| 13 | 167 | 33 | 11 | 53 | 647 | 73 | 887 | 93 | 23 |
| 14 | 179 | 34 | 419 | 54 | 659 | 74 | 29 | 94 | 17 |
| 15 | 191 | 35 | 431 | 55 | 11 | 75 | 911 | 95 | 1151 |
| 16 | 29 | 36 | 443 | 56 | 683 | 76 | 71 | 96 | 1163 |
| 17 | 5 | 37 | 5 | 57 | 5 | 77 | 5 | 97 | 5 |
| 18 | 227 | 38 | 467 | 58 | 101 | 78 | 947 | 98 | 1187 |
| 19 | 239 | 39 | 479 | 59 | 719 | 79 | 137 | 99 | 11 |
| 20 | 251 | 40 | 491 | 60 | 17 | 80 | 971 | 100 | 173 |

Глядя на ***Таблицу*** 1 можно сформулировать следующую

***Гипотезу***:

*Для любого* $\boldsymbol{n \in N}$ *и алгортма упаковки (1) всегда существует упаковка минимального порядка* ***К****, причём* ***К*** *–* ***простое число****.*

Кроме того, число $\boldsymbol{K \equiv 5\, mod(6)}$.

Следуя этой гипотезе мы получаем возможность изучать простые числа типа $K$ в качестве упаковки этого порядка.

Очевидно, что если для упаковки $U_K$ справедлив алгоритм заполнения $L(K,n)$, то справедлив и алгоритм $L(K,n+mK)$, где $m$ – натуральное число.

Рассмотрим простейшие упаковки данного алгоритма заполнения. Задача - найти закономерности, связанные с периодом упаковок $K$.

Можно вычислить местонахождение (порядковый номер клетки) $N_k$ числа $k$ в упаковке $U_K(1)$. Представим, что мы имеем бесконечное клеточное поле.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | $k$ |

Зная уравнение алгоритма (12), не сложно вычислить, сколько клеток $P_k$ будет в нашем поле до числа $k$:

$$P_k = \frac{2k^3 - 3k^2 + 7k}{6} + n(k-1) - 1. \qquad (13)$$

Откуда местонахождение $N_k$ числа $k$ в упаковке получаем из выражения:

$$P_k + 1 \equiv N_k \, mod(K) \text{ или } N_k = P_k + 1 - m \cdot K, \qquad (14)$$

где $m \in N$.

Формулы (13) и (14) можно объединить одним выражением:

$$N_k = \left( k\frac{2k^2 - 3k + 7}{6} + n(k-1) \right) - m \cdot K, \qquad (15)$$

здесь очевидно $N_k \le K$.

***Пример*** 5: пусть имеем упаковку $U_{17}(1)$. Требуется определить в какой клетке будет стоять число 11 при заполнении упаковки по алгоритму (12).

$$P_{11} + 1 = \frac{2 \cdot 11^3 - 3 \cdot 11^2 + 7 \cdot 11}{6} + 9(11-1) = 486,$$

$$N_K = 486 - m \cdot 17.$$

При $m = 28$ получаем $N_k = 10 \le K$ (Рис. 33).

Т. о., формула (15) позволяют определять местонахождение числа $k$ в упаковке $U_K(1)$ минуя вычисления мест нахождения предыдущих $k$-**1** чисел (напомним, упаковка $U_K(1)$ говорит нам, что число 1 стоит в клетке с номером 1).

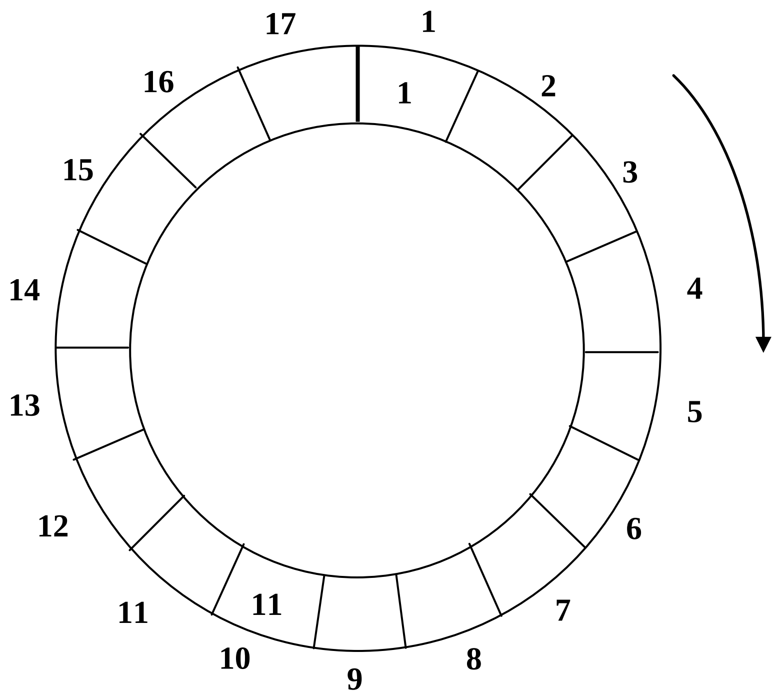



Рис. 33

Познакомимся с простейшими свойствами упаковок.

***Свойство*** 1.

Всякая упаковка обладает осью симметрии.

***Пример*** 6.

Дана упаковка $\boldsymbol{U}_{11}(2)$.

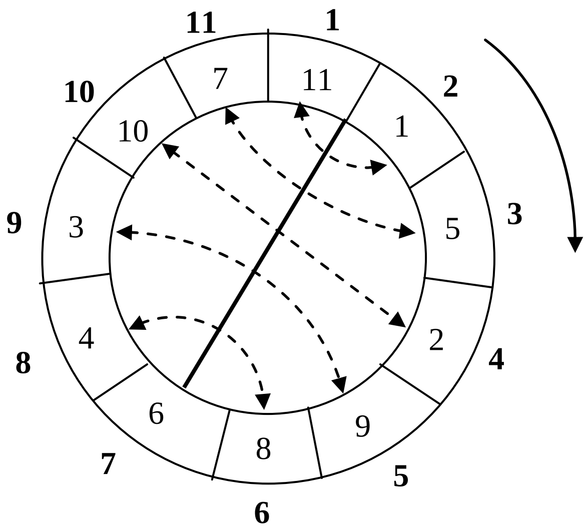



Рис. 34

Число 1 находится в клетке под номером 2, $\boldsymbol{K}$ = 11 (дано). Ось симметрии упаковки проходит через центр упаковки и клетку, где стоит число $\frac{\boldsymbol{K}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\mathbf{6}$ (жирная чёрная прямая). Сумма чисел, стоящих в симметричных клетках равна $\boldsymbol{K}+\mathbf{1}$ (связи симметричных клеток показаны пунктирными линиями, Рис. 34).

Рассмотрим упаковку $\boldsymbol{U}_{\mathbf{11}}$.

Из ***Таблицы*** 1 находим: $\boldsymbol{n}$ = 11. Т. е. имеем такой алгоритм заполнения: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\mathbf{11})=\boldsymbol{k}^2+\mathbf{11}$. Надо отметить такую особенность. Если число $\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{K}$, то можно записать такое сравнение $\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{K}}\ \boldsymbol{mod}(\boldsymbol{K})$ и число $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{K}}$ использовать вместо числа $\boldsymbol{n}$ в алгоритме заполнения: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{K}})=\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{K}}$. Тогда в нашем случае $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{K}}=\mathbf{0}$. Т. е. в общем случае $\boldsymbol{n}\in\{\boldsymbol{N}+\mathbf{0}\}$.

Зная ***Свойство*** 1, достаточно заполнять упаковку только наполовину (до числа $\frac{\boldsymbol{K}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ включительно), а остальные числа получают своё местонахождение согласно симметричному свойству.

Надо отметить ещё и такую особенность упаковок. Если алгоритм заполнения применить к числу $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{K}$ (последнему числу в упаковке), то пропустив $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{K}^2+\boldsymbol{n}$ клеток находим клетку, где должно стоять число 1, с которого начиналось заполнение упаковки. Т. е. алгоритм заполнения (12) обладает *свойством цикличности.* Назовём это свойство:

***Свойство*** 2.

Прежде чем перейти к третьему свойству упаковок введём понятие, которое будем называть графом упаковки.

Упаковка – это конечный объект. Она содержит в себе два одинаковых ряда, отличающихся друг от друга только последовательностью расположения в них чисел. Каждому числу упаковки будем сопоставлять вершину графа. А ребру графа будем сопоставлять отрезок (или дугу окружности), который связывает вершину (число упаковки) и вершину (число - номер клетки). Например, если число 1 находится в клетке 3, а число 3 стоит в клетке 1, то это будет графически выглядеть таким образом:


Рис. 35

Если число $\boldsymbol{k}$ находится в клеке с номером $\boldsymbol{k}$, то на графе это будет выглядеть так:

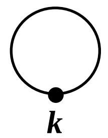



Рис. 36

Построим граф для упаковки ***Примера*** 6.

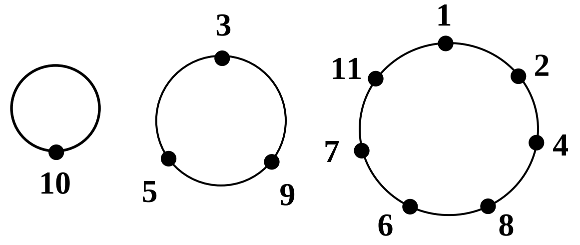



Рис. 37

Очевидно, что граф упаковки всегда будет представлять собой цикл (или вырожденный цикл – ребро) или несколько циклов. Для графов примем обозначение: $\boldsymbol{G_K(n)=(\cdots)}$. Например, граф Рис. 37 будет иметь такое обозначение: $\boldsymbol{G_{11}(2)=(1{,}3{,}7)}$. Числа в скобках справа от знака равенства обозначают, что граф состоит из трёх циклов порядка 1, 3 и 7. Первый цикл – это всего одна точка (т. к. число 10 находится в клетке 10). Второй цикл – это три точки, т. к. число 3 стоит в 9-ой клетке, число 9 стоит на 5-ом месте, а число 5 стоит в клетке с номером 3 (см. Рис. 34) – цикл замкнулся. Аналогично получаем и цикл из семи чисел. Можем записать: $\boldsymbol{U_{11}(2)\to G_{11}(2)=(1{,}3{,}7)}$ - т. е. упаковка порождает граф. Правую скобку можно расписать подробно $\boldsymbol{(1{,}3{,}7)=\{(10)(3{,}9{,}5)(1{,}2{,}4{,}8{,}6{,}7{,}11)\}}$.

Очевидно также, что число графов равно числу упаковок и равно порядку ***К*** упаковки.

Два графа будем называть изоморфными если они имеют одинаковое представление в правой скобке записи графа. Обозначать это будем так: $\boldsymbol{G_K(n)\equiv G_K(m)}$.

Теперь можем сформулировать третье свойство упаковок.

***Свойство*** 3.

Среди всех графов упаковки порядка *К,* как минимум, один граф не имеет себе изоморфного.

***Пример*** 7.

Рассмотрим самые маленькие упаковки для алгоритма заполнения (12) при *n*=2. Это упаковки $\boldsymbol{U_5(k_i)}$, т. е. порядок равен 5-ти. Построим все графы данных упаковок.

$\boldsymbol{U_5(1)}$ $\boldsymbol{G_5(1)=(1{,}1{,}3)}$

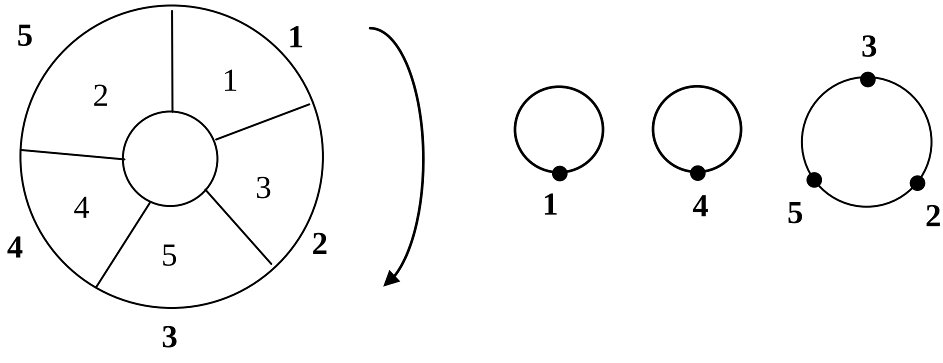



Рис. 38

$U_5(2)$ $G_5(2)=(1,2,2)$

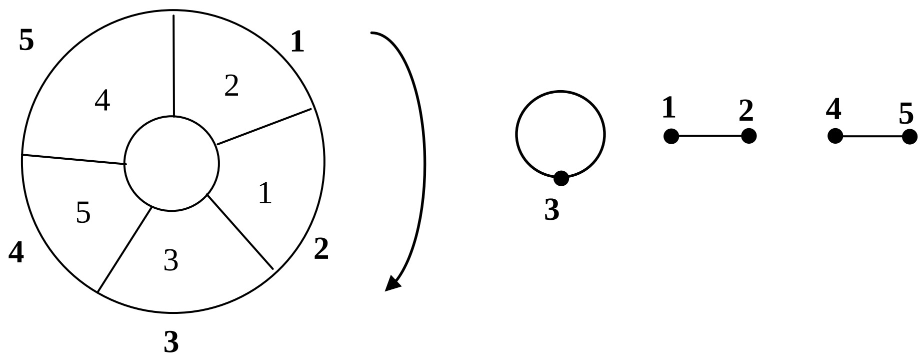



Рис. 39

$U_5(3)$ $G_5(3)=(1,1,3)$

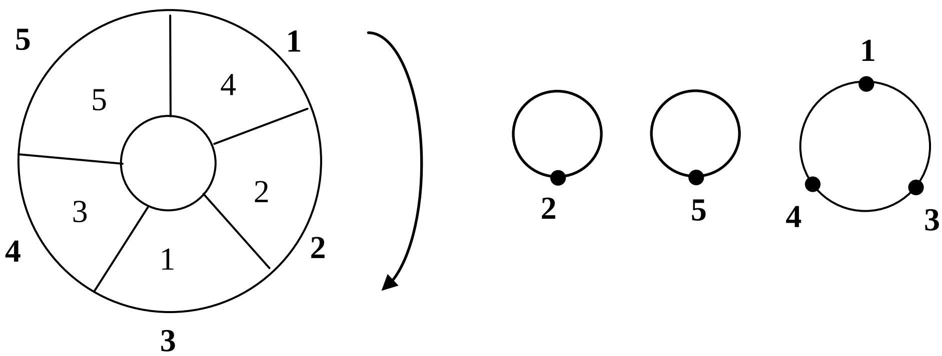



Рис. 40

$U_5(4)$ $G_5(4)=(5)$

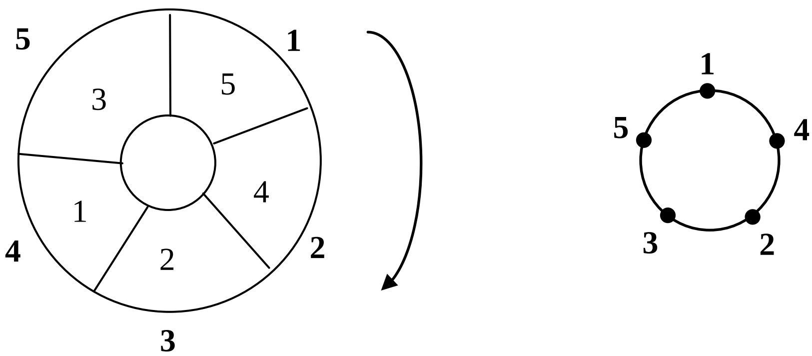



Рис. 41

$U_5(5)$ $\qquad$ $G_5(5)=(5)$

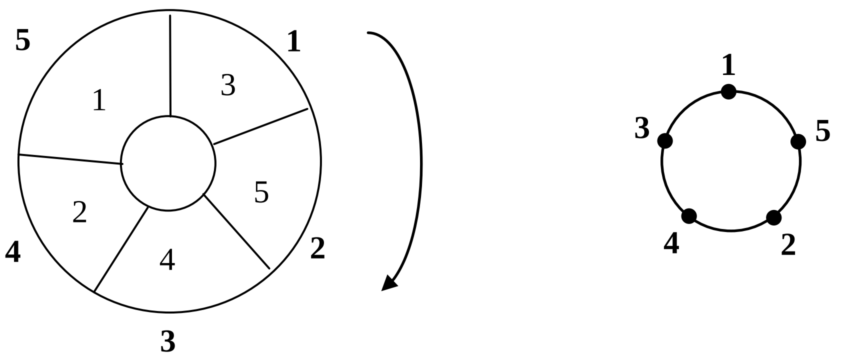



Рис. 42

Глядя на Рис. 38–42, можем записать: $G_5(1)\equiv G_5(3)=(1{,}1{,}3)$, $G_5(4)\equiv G_5(5)=(5)$. Граф $G_5(2)=(1{,}2{,}2)$ не изоморфен никакому другому.

***Пример*** 8.

Рассмотрим все графы упаковок $U_{11}$.

$$G_{11}(2)\equiv G_{11}(11)=(1{,}3{,}7);$$
$$G_{11}(3)\equiv G_{11}(10)=(11);$$
$$G_{11}(4)\equiv G_{11}(9)=(1{,}1{,}2{,}3{,}4);$$
$$G_{11}(5)\equiv G_{11}(8)=(2{,}2{,}7);$$
$$G_{11}(6)\equiv G_{11}(7)=(1{,}4{,}6);$$
$$G_{11}(1)=(1{,}1{,}1{,}4{,}4).$$

Как видим, все, кроме одного графа (это граф $G_{11}(1)$), попарно изоморфны.

Наберёмся терпения и выпишем все графы для упаковок порядка $K=17$ и $K=23$.

$$G_{17}(1)\equiv G_{17}(10)=(1{,}6{,}10);$$
$$G_{17}(2)\equiv G_{17}(9)=(1{,}1{,}2{,}4{,}9);$$
$$G_{17}(3)\equiv G_{17}(8)=(1{,}1{,}1{,}5{,}9);$$
$$G_{17}(4)\equiv G_{17}(7)=(3{,}5{,}9);$$
$$G_{17}(5)\equiv G_{17}(6)=(2{,}3{,}12);$$
$$G_{17}(11)\equiv G_{17}(17)=(1{,}3{,}13);$$
$$G_{17}(12)\equiv G_{17}(16)=(1{,}4{,}12);$$
$$G_{17}(13)\equiv G_{17}(15)=(2{,}2{,}13);$$
$$G_{17}(14)=(1{,}8{,}8).$$

В второй группе графов также все попарно изоморфны кроме одного.

$$G_{23}(1)\equiv G_{23}(2)=(1{,}5{,}17);$$
$$G_{23}(3)\equiv G_{23}(23)=(2{,}4{,}17);$$

$$G_{23}(4) \equiv G_{23}(22) = (1,2,5,5,10);$$
$$G_{23}(5) \equiv G_{23}(21) = (2,4,4,5,8);$$
$$G_{23}(6) \equiv G_{23}(20) = (1,1,5,5,11);$$
$$G_{23}(7) \equiv G_{23}(19) = (1,1,1,4,16);$$
$$G_{23}(8) \equiv G_{23}(18) = (2,3,3,4,11);$$
$$G_{23}(9) \equiv G_{23}(17) = (1,3,3,6,10);$$
$$G_{23}(10) \equiv G_{23}(16) = (1,9,13);$$
$$G_{23}(11) \equiv G_{23}(15) = (1,2,2,3,15);$$
$$G_{23}(12) \equiv G_{23}(14) = (5,6,12);$$
$$G_{23}(13) = (1,1,1,5,5,5,5).$$

Аналогичную картину наблюдаем и в последней группе, граф $G_{23}(13)$ не имеет пары.

Рассмотрим изоморфные графы $G_K(n) \equiv G_K(m)$. Введём обозначения: $n+m=s$ (и $n+m=t$ сумма этих значений почти всегда имеет две различных константы: $s>t$ либо $s=t$). Тогда не сложно заметить такое свойство.

***Свойство*** 4.(для изоморфных графов).

Если $G_K(n) \equiv G_K(m)$, то $s \equiv t\, mod(K)$.

Действительно:

$$9 \equiv 4\, mod(5),$$
$$13 \equiv 13\, mod(11) \text{ или } 13 \equiv 13\, \mathrm{mod}(0)$$
$$28 \equiv 11\, mod(17),$$
$$26 \equiv 3\, mod(23).$$

Если понять как возникают значения $s$ и $t$, то можно было бы говорить о формуле, которая всегда даёт простые числа: $K = m \cdot (s-t)$. Разумеется здесь $s$, $t$ $m$ – целые числа.

Анализируя полученные упаковки (***Таблица*** 1), можно сформултровать следующее

***Свойство*** 5.

Для алгоритма заполнения $L(K,n)$ имеем такую закономерность: $N_K + n = K$.

Зная уравнение (15), получаем характеристическое диофантово уравнение для упаковки $U_K(1)$.

$$2K^2 - 3K + 1 + 6(n-m) = 0. \tag{16}$$

Несложный анализ показывает, что $m > n$. Для любой упаковки $U_K(1)$ справедливо уравнение (16), но обратное не верно – не каждое решение (16) соответствует упаковке.

***Пример упаковки*** $\boldsymbol{U_{17}(1)}$

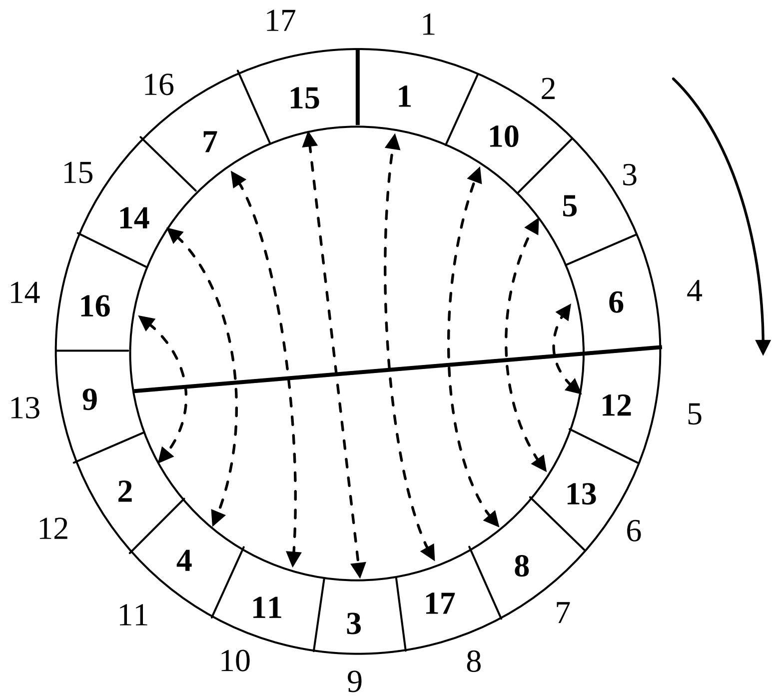



Рис. 43

***Пример упаковки*** $\boldsymbol{U_{23}(1)}$

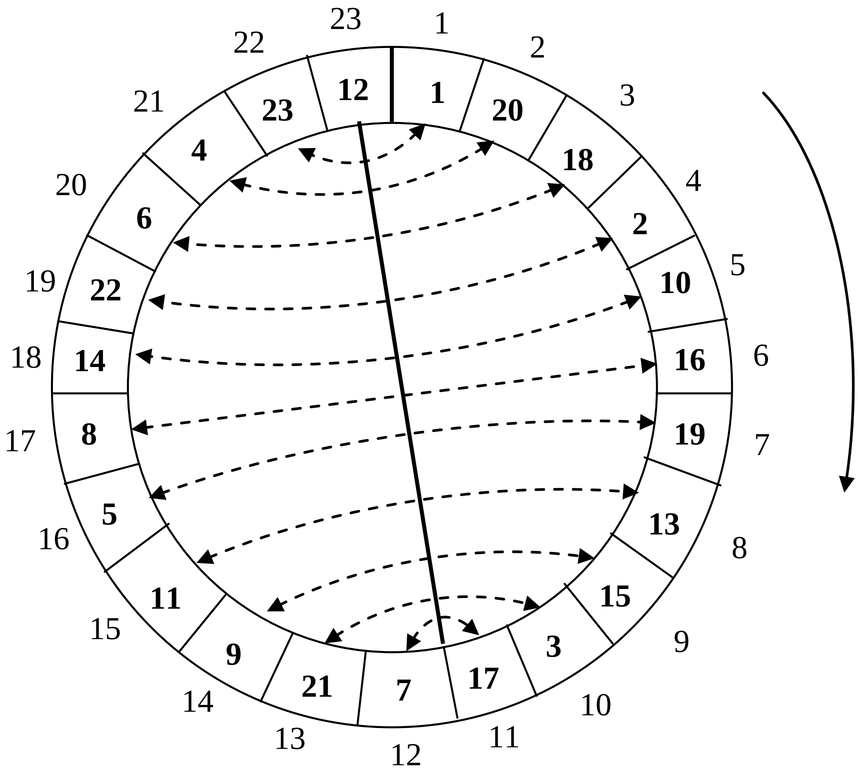



Рис. 44

## 4 Визуально-аналитическое дополнение.

Представим ***Таблицу*** 1 в виде графика в координатах (***n, K***) (Рис.45). Синие точки – это числа, характеризующие наши упаковки (порядок).

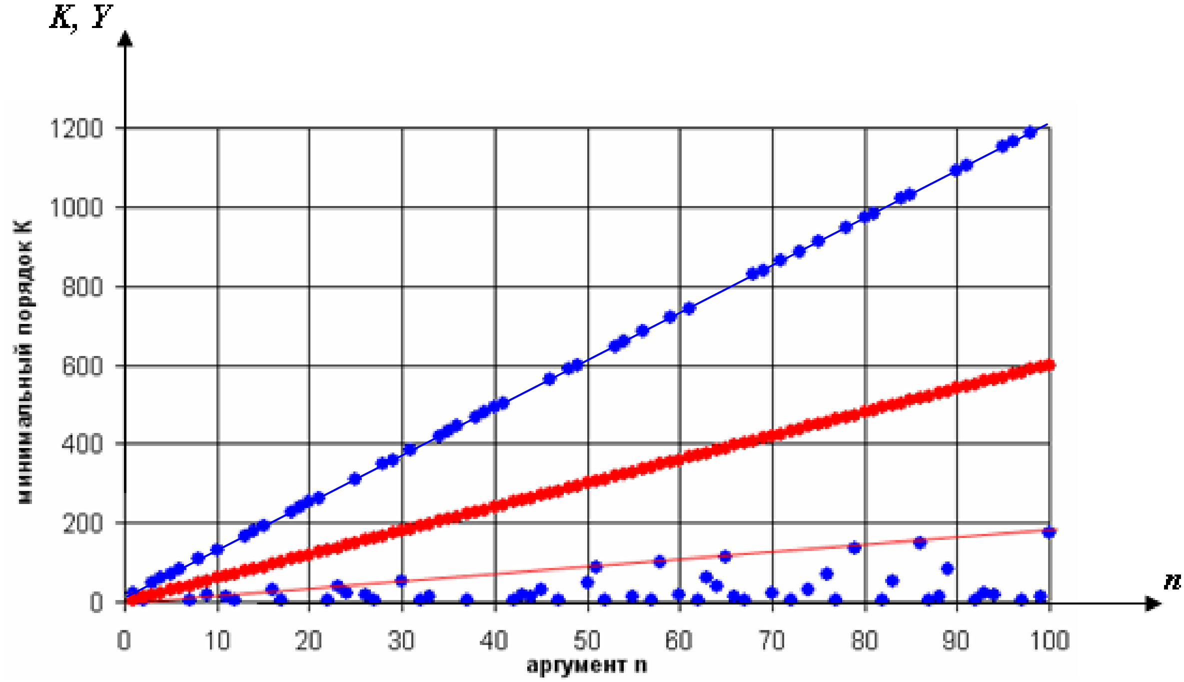



Рис. 45

Мы помним, что числа порядка упаковок относятся к числам типа $K \equiv 5 mod(6)$. Такие числа принадлежат прямой $Y = 6n - 1$ (красные точки на графике).

Удивляет то, что часть синих точек (48 точек из 100) строго легли на прямую $Y_K = 12n + 13$. Впечатление такое, что остальные 52 синих точки хаотично «ссыпались» из синей прямой. Причём, некоторые из них легли точно на прямую $Y_H = \frac{12}{7}n + \frac{11}{7}$ (на Рис. 45 эта прямая показана красным цветом), а остальные точки расположились под ней. Глядя на Рис. 45, можно предположить, что прямая $Y = 6n - 1$ очень близка к биссектрисе (эти три прямые не имеют общей точки пересечения) между красной и синей прямыми.

В заключение можем ещё предположить, что для простых чисел $K \equiv 1(mod\ 6)$ справедлив алгоритм заполнения упаковок $L(K, n) = k^4 + n$. Автору известно, по крайней мере, что две упаковки существуют для чисел порядка 7 и 103.

Отметим также, что *все простые числа* кроме 2 и 3 - это числа типа $K \equiv 1 mod(6)$ или типа $K \equiv 5 mod(6)$.

Мы надеемся что теория упаковок найдёт заинтересованного исследователя и поможет пролить свет на некоторые тайны простых чисел.