Франц Герман

Нелинейная теория матриц

franz.h-n@yandex.ru

Содержание

1. Оператор обращения

Объектом нашего исследования будут невырожденные матрицы второго порядка. Обозначать матрицы будем традиционно, как принято в большинстве литературы: $\boldsymbol{A} = \left\|\boldsymbol{a}_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{pmatrix}$. В некоторых случаях матрицу будем называть оператором.

Матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ называется обратной по отношению к матрице $\boldsymbol{A}$, если выполняется равенство:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ - единичная матрица.

В абсолютном большинстве литературы для вычисление обратной матрицы приводится конкретное правило (мы не приводим его здесь), но нигде не говорится об операторе обращения. Введём

***Определение*:**
Матрицу $\boldsymbol{A_O}$ будем называть оператором обращения матрицы $\boldsymbol{A}$, если справедливо выражение $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Свойства оператора обращения $\boldsymbol{A_O}$.

1. *Коммутативность* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A}$.

Действительно, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Умножем второе равенство на $\boldsymbol{A}^{-1}$ слева, получим: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ или $\boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$. Полученное выражение умножем справа на $\boldsymbol{A}$, получим: $\boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Что и требовалось доказать

2. $\boldsymbol{A_O} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$ (см. Свойство 1)

3. *Перестановоченость* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Доказательство этого свойства очевидно следует из Свойства 1.

4. $\boldsymbol{A_O}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$.

$\boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A_O}^{-1} = \boldsymbol{E}$, но $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A_O}^{-1} = \boldsymbol{A_O} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{A_O}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$

Что и требовалось доказать.

5. *Если* $\boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{C}$, *то* $\left(\boldsymbol{B_O} \cdot \boldsymbol{A_O}\right)^2 = \boldsymbol{C_O}$

Рассмотрим тождество $\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right) \cdot \left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right) \cdot \left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{E}$. Чтобы оно выполнялось должно выполняться равенство $\left(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\right)_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}\boldsymbol{B_O}\boldsymbol{A_O}$. Действительно,

$$A^2B^2A^2\underbrace{B^2B_O}_{E}A_OB_OA_O = A^2B^2\underbrace{A^2A_O}_{E}B_OA_O = A^2\underbrace{B^2B_O}_{E}A_O = A^2A_O = E\,,$$

т. е. так как $A^2 \cdot B^2 = C$, то $(B^2 \cdot A^2)_O = C_O = B_OA_OB_OA_O = (B_OA_O)\cdot(B_OA_O) = (B_OA_O)^2$ или $(B_O \cdot A_O)^2 = C_O$.

Что и требовалось доказать.

Вычислим элементы a_{ij} для матрицы A_O.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $|A|$ - определитель матрицы A (иногда определитель $|A|$ также будем обозначать $\det(A)$), а A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Обозначим $A_O = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot A_O = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Можем составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = \dfrac{A_{11}}{|A|} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = \dfrac{A_{12}}{|A|} \end{cases}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = \dfrac{A_{21}}{|A|} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = \dfrac{A_{22}}{|A|} \end{cases}. \qquad (2)$$

Из решения системы (1) находим элементы x_{11} и x_{21}, а из решения системы (2) - x_{12} и x_{22}.

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & a_{12} \\ A_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & A_{11} \\ a_{21} & A_{12} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} A_{21} & a_{12} \\ A_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}; \quad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & A_{21} \\ a_{21} & A_{22} \end{vmatrix}}{|A|^2}.$$

Выразим элементы x_{ij} через элементы a_{ij}.

Известно, что $A_{11} = a_{22}$, $A_{22} = a_{11}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, тогда:

$$x_{11} = \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{|A|^2};\; x_{12} = \frac{-a_{12}(a_{22} + a_{11})}{|A|^2};\; x_{21} = \frac{-a_{21}(a_{22} + a_{11})}{|A|^2};\; x_{22} = \frac{a_{11}^2 + a_{12}a_{21}}{|A|^2}$$

Определитель $|A_O| = \dfrac{1}{|A|^2}$ и $|A| \cdot |A_O| = |A^{-1}|$

Пример:

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, используя оператор обращения $A_O = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

Определитель данной матрицы равен **1**. Вычислим элементы оператора обращения: $x_{11} = 17$, $x_{12} = -12$, $x_{21} = -24$, $x_{22} = 17$, т. е. $A_O = \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{pmatrix}$. Находим обратную матрицу.

$$A \cdot A_O = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что $A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Теорема о разложении матрицы в линейную комбинацию ее сопряжённых корней.

Воспользуемся формулой для вычисления квадратных корней из невырожденной квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ([1], стр. 277).

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A}}}\left(A \pm E\sqrt{\det A}\right), \tag{3}$$

при условии, что $a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{\det A} \neq 0$.

Сопряжёнными корнями матрицы A будем называть матрицы:

$$\sqrt{A_1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} + 2\sqrt{\det A}}}\left(A + E\sqrt{\det A}\right),$$

$$\sqrt{A_2} = \frac{-1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\det A}}}\left(A - E\sqrt{\det A}\right)$$

Произведение сопряжённых квадратных корней коммутативно, т. е. $\sqrt{A_1}\sqrt{A_2}=\sqrt{A_2}\sqrt{A_1}$. В этом не трудно убедиться прямым вычислением.

Справедлива следующая

***Теорема* 1:**

Если матрица второго порядка имеет квадратные корни, то её можно представить в виде линейной комбинации своих сопряжённых корней.

Доказательство.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеет квадратные корни. Докажем, что $A=k_1\sqrt{A_1}+k_2\sqrt{A_2}$.

Умножим $\sqrt{A_1}$ на $k_1=\dfrac{\sqrt{a_{11}+a_{22}+2\sqrt{\det A}}}{2}$, а $\sqrt{A_2}$ на $k_2=-\dfrac{\sqrt{a_{11}+a_{22}-2\sqrt{\det A}}}{2}$ и сложим полученные выражения, получим:

$$k_1\sqrt{A_1}+k_2\sqrt{A_2}=\frac{1}{2}\left(A+E\sqrt{\det A}\right)+\frac{1}{2}\left(A-E\sqrt{\det A}\right)=A.$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим разложение матриц в линейную комбинацию сопряжённых корней на примере известных матриц Паули: $S^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S^2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $S^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдём сопряжённые корни для матрицы S^1.

$$\sqrt{S_1^1}=\frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix},\quad \sqrt{S_2^1}=-\frac{1}{i\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты линейного разложения имеют вид:

$$k_1=\frac{\sqrt{2i}}{2},\qquad k_2=-\frac{i\sqrt{2i}}{2}.$$

Получаем такое разложение:

$$S^1=\sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^1}-i\sqrt{S_2^1}\right)$$

Аналогичные выражения получаем и для других матриц:

$$S^2=\sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^2}-i\sqrt{S_2^2}\right),\qquad S^3=\sqrt{\frac{i}{2}}\left(\sqrt{S_1^3}-i\sqrt{S_2^3}\right)$$

В общем виде можем записать:

$$\boldsymbol{S}^{k} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2i}}}\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} + \boldsymbol{i}\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\right). \qquad (4)$$

Как оказалось, произведение сопряжённых корней матриц Паули равно единичной матрице.

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} = \boldsymbol{E}\,. \qquad (5)$$

Интересно также, что оператор обращения для $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}$ совпадант с оператором обращения для $\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}$. Действительно, в силу (5) матрица $\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}$ является обратной для матрицы $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}$ и наоборот. Т. о. можем записать:

$$\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}} \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}} = \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}\,, \qquad \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}} = \sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\,.$$

Из свойств 2 и 4 операторов обращения имеем: $\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}} = \left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}\right)^{2} = \boldsymbol{S}^{k}$, $\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}} = \left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\right)^{2} = \boldsymbol{S}^{k}$, т. е. $\left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}} = \left(\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}\right)_{\boldsymbol{O}}$.

Примечание.

Формула (4) по своей структуре очень напоминает формулу векторного бозона $\boldsymbol{W}_{\alpha}^{\pm} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{1})_{\alpha} \mp \boldsymbol{A}(\boldsymbol{2})_{\alpha}\right]$ ([2], стр. 127). Сравнивая формулу векторного бозона с формулой (4), можем записать: $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}} = \mp\boldsymbol{A}(\boldsymbol{2})_{\alpha}$, $\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{1})_{\alpha}$ и $\boldsymbol{W}_{\alpha}^{\pm} = \boldsymbol{S}^{k}\sqrt{\boldsymbol{i}}$ Мы советуем физикам-теоретикам обратить на это внимание.

Справедлива следующая

***Теорема* 2:**

Любая матрица Паули вместе со своими матрицами квадратных корней и единичной матрицей образует циклическую группу четвёртого порядка.

Доказательство:

Зная (5) можем записать: $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} = \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}$, т. е. $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}} \cdot \boldsymbol{S}^{k} = \sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}$. Аналогично: $\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}} \cdot \boldsymbol{S}^{k} = \sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}$. Можем составить таблицу умножения для матриц $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{S}^{k}$, $\sqrt{\boldsymbol{S}_{1}^{k}}$, $\sqrt{\boldsymbol{S}_{2}^{k}}$.

	E	$\sqrt{S_1^k}$	S^k	$\sqrt{S_2^k}$
E	E	$\sqrt{S_1^k}$	S^k	$\sqrt{S_2^k}$
$\sqrt{S_1^k}$	$\sqrt{S_1^k}$	S^k	$\sqrt{S_2^k}$	E
S^k	S^k	$\sqrt{S_2^k}$	E	$\sqrt{S_1^k}$
$\sqrt{S_2^k}$	$\sqrt{S_2^k}$	E	$\sqrt{S_1^k}$	S^k

Множество этих четырёх матриц, таблицу умножения которых мы только что составили, будем обозначать через G^k. Убедимся, что это множество действительно является группой.

Первое, существует единичный элемент. Это матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Второе, для всякой матрицы из множества G^k существует матрица ей обратная.

Третье, произведение двух матриц из множества G^k снова даёт матрицу этого же множества.

И, наконец, четвёртое, операция умножения является ассоциативной, это следует непосредственно из свойств умножения матриц.

Т. о., все аксиомы группы выполняются, следовательно множество G^k действительно является группой.

Заметим, что группа G^k изоморфна группе вращений квадрата.

Совершенно очевидно, что G^1, G^2 и G^3 изоморфны между собой.

3. Доказательство существования бесконечного множества корней квадратных из матриц вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Для доказательства достаточно показать, что существует бесконечное множество корней квадратных из матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Действительно, все матрицы $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k} \\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ будут являться корнями матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $k \neq 0$ и k – любое число.

Проверим это прямым вычислением.

$$X\cdot X=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k}\\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2k}\\ k & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2k\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{2k\sqrt{2}}\right)\\ \frac{k}{\sqrt{2}}-\frac{k}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. О невозможности извлечения квадратного корняиз матриц вида $A=\begin{pmatrix}a & a\\ -a & -a\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & -a\end{pmatrix}$.

Для доказательства достаточно показать, что квадратного корня не существует у матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

Доказательство:

Пусть такой корень существует $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, т. е. $X\cdot X=A$ или

$$X\cdot X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+cb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Из чего получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases}a^2+bc=1\\ d^2+bc=-1\\ b(a+d)=1\\ c(a+d)=-1\end{cases}.$$

Т. к. $\det A=0$, то и $ad-bc=0$, т. е. $ad=bc$. Из первого уравнения полученной системы имеем $a^2+ad=1$ или $d=\frac{1-a^2}{a}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $\left(\frac{1-a^2}{a}\right)^2+1-a^2=-1$ или $(1-a^2)^2+a^2(1-a^2)=-a^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем явное противоречие: $1=0$.

Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ все выкладки проделываются аналогично.

5. Условие идемпотентности квадратных матриц второго порядка

Матрица A называется идемпотентной, если выполняется условие $A^2=A$ ([3], стр. 61).или $\sqrt{A}=A$, т. е.

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{\det A}}}\begin{pmatrix} a_{11}\pm\sqrt{\det A} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\pm\sqrt{\det A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \pm a_{11}\sqrt{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{\det A}} = a_{11}\pm\sqrt{\det A} \\ \pm a_{12}\sqrt{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{\det A}} = a_{12} \\ \pm a_{21}\sqrt{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{\det A}} = a_{21} \\ \pm a_{22}\sqrt{a_{11}+a_{22}\pm 2\sqrt{\det A}} = a_{22}\pm\sqrt{\det A} \end{cases}.$$

Из второго (или третьего) уравнения, полученной системы имеем: $a_{11}+a_{22}=1\mp 2\sqrt{\det A}$ (необходимо следить за согласованием знаков $\pm$ и $\mp$). Подставим это выражение в первое уравнение, получим: $\pm a_{11}=a_{11}\pm\sqrt{\det A}$. Откуда заключаем:

$$\det A = 0, \qquad a_{11}+a_{22}=1. \tag{6}$$

Условия (6) и есть условия идемпотентности матрицы.

***Пример*:**

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4\end{pmatrix}$. Как видим, условия идемпотентности выполняются. Убедимся, что матрица A дествительно идемпотентна. Т. е. вычислим A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9-12 & -6+8 \\ 18-26 & -12+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4\end{pmatrix}=A.$$

6. Нелинейные системы уравнений второго порядка, задаваемые матричными уравнениями

Рассмотрим матричное уравнение (о матричных уравнениях см. ([4], стр. 196)).

$$X^2+BX+C=0, \tag{7}$$

где $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$.

Уравнению (7) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}^2+x_{12}x_{21}+bx_{11}+c_{11}=0 \\ x_{11}x_{12}+x_{12}x_{22}+bx_{12}+c_{12}=0 \\ x_{21}x_{11}+x_{22}x_{21}+bx_{21}+c_{21}=0 \\ x_{12}x_{21}+x_{22}^2+bx_{22}+c_{22}=0 \end{cases}. \tag{8}$$

Решив (7), получим решения системы уравнений (8). В общем случае можем записать:

$$\boldsymbol{X} = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}\right)^2 - \boldsymbol{C}}\,. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда $\boldsymbol{x_{12} = x_{21}}$ и $\boldsymbol{c_{12} = c_{21}}$, тогда второе и третье уравнения системы (8) будут тождественны и система примет такой вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}^2 + x_{12}^2 + bx_{11} + c_{11} = 0} \\ \boldsymbol{x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} + bx_{12} + c_{12} = 0} \\ \boldsymbol{x_{12}^2 + x_{22}^2 + bx_{22} + c_{22} = 0} \end{cases}. \tag{10}$$

Пример:
Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}^2 + x_{12}^2 + 2x_{11} = 0} \\ \boldsymbol{x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} + 2x_{12} + 1 = 0} \\ \boldsymbol{x_{12}^2 + x_{22}^2 + 2x_{22} - 1 = 0} \end{cases} \tag{11}$$

Этой системе уравнений соответствует матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} & \boldsymbol{x_{12}} \\ \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{x_{22}} \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} & \boldsymbol{x_{12}} \\ \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{x_{22}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

Используя формулу (9) найдём решения, полученного матричного уравнения.

$$\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}\right)^2 - \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{det}\,\boldsymbol{D} = \mathbf{1}\,.$$

Найдём корни квадратные из матрицы $\boldsymbol{D}$.

$$\sqrt{\boldsymbol{D}} = \frac{\mathbf{\pm 1}}{\sqrt{\mathbf{1+2\pm 2}}} \begin{pmatrix} \mathbf{1\pm 1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2\pm 1} \end{pmatrix}.$$

Получаем такие промежуточные решения:

$$\boldsymbol{X}_1 = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} + \sqrt{\boldsymbol{D}_1}\,, \quad \boldsymbol{X}_2 = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} - \sqrt{\boldsymbol{D}_1}\,, \quad \boldsymbol{X}_3 = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} + \sqrt{\boldsymbol{D}_2}\,, \quad \boldsymbol{X}_3 = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} - \sqrt{\boldsymbol{D}_2}\,,$$ или

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем такие четыре решения системы уравнений (11).

$$X_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ x_{12} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ x_{22} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}; \quad X_2 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{-2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ x_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ x_{22} = \frac{-3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}; \quad X_3 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = -1 \\ x_{12} = -1 \\ x_{22} = 0 \end{cases}; \quad X_4 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = -1 \\ x_{12} = 1 \\ x_{22} = -2 \end{cases}.$$

Рассмотрим матричное уравнение вида:

$$X^2 + BX + XB + C = 0. \tag{12}$$

Решением такого уравнения будет матрица $X = -B \pm \sqrt{B^2 - C}$. Система нелинейных уравнений, соответствующая матричному уравнению (12) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} + 2b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} + b_{21}x_{12} + c_{11} = 0 \\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} + x_{12}(b_{11} + b_{22}) + b_{12}(x_{11} + x_{22}) + c_{12} = 0 \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} + x_{21}(b_{11} + b_{22}) + b_{21}(x_{11} + x_{22}) + c_{21} = 0 \\ x_{22}^2 + x_{12}x_{21} + 2b_{22}x_{22} + b_{21}x_{12} + b_{12}x_{21} + c_{22} = 0 \end{cases}. \tag{13}$$

Перейдём к рассмотрению нелинейных систем матричных уравнений.

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 - B = 0 \\ XY + YX - C = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Решим данную систему, т. е. найдём матрицы X и Y.

Сложив уравнения, получаем $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^2=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ или $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}$. Откуда $\boldsymbol{X}=\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{Y}$. Подставим последнее выражение во второе уравнение:

$$\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^2+\boldsymbol{Y}\cdot\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{C}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\boldsymbol{Y}^2-\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{Y}-\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}\cdot\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}.$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(\boldsymbol{Y}-\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}\right)^2-\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}.$$

С учётом последнего выражения, находим решения системы (14).

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}-\sqrt{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}\right),\qquad \boldsymbol{Y}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}+\sqrt{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}\right).$$

Введём обозначения: $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}x_5 & x_6\\ x_7 & x_8\end{pmatrix}$, $-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$, $-\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}b_5 & b_6\\ b_7 & b_8\end{pmatrix}$. Тогда матричной системе уравнений (14) будет соответствовать нелинейная система их восьми уравнений с восьмью неизвестными.

$$\begin{cases}
x_1^2+x_2x_3+x_5^2+x_6x_7+b_1=0\\
x_1x_2+x_2x_4+x_5x_6+x_6x_8+b_2=0\\
x_1x_3+x_3x_4+x_5x_7+x_7x_8+b_3=0\\
x_2x_3+x_4^2+x_6x_7+x_8^2+b_4=0\\
x_2x_7+2x_1x_5+x_6x_3+b_5=0\\
x_1x_6+x_2x_8+x_2x_5+x_6x_4+b_6=0\\
x_3x_5+x_4x_7+x_1x_7+x_3x_8+b_7=0\\
x_3x_6+2x_4x_8+x_2x_7+b_8=0
\end{cases}\qquad(15)$$

Изложенные методы позволяют решать типовые системы нелинейных уравнений вида (8), (13), (15).

7. Извлечение квадратного корня из матриц четвёртого порядка.

Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}$, представим её в клеточном виде:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

Если матрицы $\boldsymbol{A}_{ij}$ все коммутативны друг относительно друга, то всё вышеизложенное можно применить для матриц четвёртого порядка. В качестве определителя матрицы $\boldsymbol{A}$ примем значение $\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22} - \det A_{12} \cdot \det A_{21}$. Тогда, аналогично формуле (3), можем записать:

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{A_{11} + A_{22} \pm 2E\sqrt{\det A}}}\left(A \pm E\sqrt{\det A}\right), \qquad (16)$$

где $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет квазидиагональный вид: $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$, то

$\sqrt{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим на примере извлечение квадратного корня из некоторой матрицы третьего порядка. Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Представим данную матрицу в виде квазидиагональной матрицы $\boldsymbol{D}$ четвёртого порядка:

$$\boldsymbol{D}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} D_{11} & D_{12} \\ \hdashline D_{21} & D_{22} \end{array}\right).$$

По определению $\det D = \det D_{11} \cdot \det D_{22} - \det D_{12} \cdot \det D_{21} = 1$. Матрицы $\boldsymbol{D}_{ij}$ - коммутативны между собой. Найдём один из корней матрицы ***D.***

Воспользуемся формулой (16).

$$\sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}}}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем $\sqrt{D} = \left(\begin{array}{c:ccc}1&0&0&0\\ \hdashline 0&1&\frac{3}{2}&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$, тогда $\sqrt{A} = \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Прямая проверка показывает, что $\sqrt{A}\cdot\sqrt{A} = A$.

Общую теорию об извлечении корней из матриц можно найти в [4], стр. 199.

8. Теорема о разложении матрицы второго порядка на коммутативные множители.

***Теорема* 3**:

Всякую матрицу второго порядка можно разложить на произведение коммутативных сомножителей.

Доказательство.

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$. Представим её в виде $A = (B+N)\cdot(B+M)$, где $B = \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix}n&0\\0&n\end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}$. Множители $(B+N)$ и $(B+M)$ в этом случае действительно будут коммутативны.

Что и требовалось доказать.

Зная m и n, можно найти B из уравнения $B^2 + (m+n)\cdot B + mn - A = 0$, и таким образом построить разложение.

Рассмотрим наиболее простой вариант разложения, когда $n = -m = k$. Получаем: $A = (B-K)\cdot(B+K)$, т. е. $B = \sqrt{A+K^2}$.

Пример:

Пусть $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{B}=\sqrt{\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}=\sqrt{\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}}$, $\mathbf{det}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\mathbf{4}$.

$$\boldsymbol{B}=\frac{\pm\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}\pm\mathbf{4}}}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\pm\mathbf{2} & \mathbf{5}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3}\pm\mathbf{2}\end{pmatrix}.$$

Для разложения возьмём какое-нибудь из двух значений полученной матрицы. Например, $\boldsymbol{B}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Проверка: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Введём обозначения $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K})$.

Рассмотрим, при каком $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{x}_{11}=\mathbf{0}$ (или $\boldsymbol{x}_{22}=\mathbf{0}$).

Пусть $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{k}^2 & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}+\boldsymbol{k}^2\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}-\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\boldsymbol{k}^4-\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}=\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\boldsymbol{k}^4.$$

$$\sqrt{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12}\\ \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\pm\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}+2\boldsymbol{k}^2\pm2\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\boldsymbol{k}^4}}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{k}^2\pm\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{C}} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{a}_{21}+\boldsymbol{k}^2\pm\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{C}}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{b}_{11}$ должно равняться $\boldsymbol{k}_{11}$ (или просто $\boldsymbol{k}$, т. к. $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$), тогда $\boldsymbol{x}_{11}=\mathbf{0}$. Отсюда получаем:

$$\frac{\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{k}^2\pm\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\boldsymbol{k}^4}}{\sqrt{\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}+2\boldsymbol{k}^2\pm2\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\boldsymbol{k}^4}}}=\boldsymbol{k}$$

Упростив полученное выражение, имеем: $k^2 = \dfrac{\left(a_{11}^2 - \det A\right)^2}{4a_{11}a_{12}a_{21}}$ или

$$k = \frac{a_{11}^2 - \det A}{2\sqrt{a_{11}a_{12}a_{21}}}. \tag{17}$$

Аналогично получаем, чтобы $x_{22} = 0$ должно выполняться равенство:

$$k = \frac{a_{22}^2 - \det A}{2\sqrt{a_{122}a_{12}a_{21}}} \tag{18}$$

Пример:

Разложить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ на коммутативные множители X и Y, причём так, чтобы $x_{11} = 0$ (или $y_{11} = 0$).

$\det A = -1$, $k^2 = \dfrac{(1-(-1))^2}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$. Для определённости возьмём $k = 1$, т. е. $K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = B - K$, $Y = B + K$, $B^2 = A + K^2$, где $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. И $B = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2 + 1 \pm 2 \cdot 1}} \begin{pmatrix} 2 \pm 1 & 1 \\ 1 & 1 \pm 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём один из корней B. Например, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Сделаем проверку:

$$A = XY = YX = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы построили коммутативное разложение матрицы A, причём $x_{11} = 0$.

Расмотрим возможность разложения матриц второго порядка на коммутативные множители вида: $B = XY = YX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}$ (или $x_{11} = 0$ и $y_{11} = 0$).

Пусть $B = (A - K)(A + K) = (A + K)(A - K)$, тогда матрицы B и $(A + K)^{-1}$ коммутативны. Аналогично, матрицы B и $(A - K)^{-1}$ также будут коммутативными, т. е. $(A + K) = B(A - K)^{-1} = (A - K)^{-1} B$.

Пусть дана матрица $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=X$. Обозначим $(A-K)^{-1}=Y$, $(A+K)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда $(A-K)=\begin{pmatrix} a_{11}-2k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-2k \end{pmatrix}$.

Предположим, что $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$ и помним, что

$$k^2=\frac{\left(b_{11}^2-\det B\right)^2}{4b_{11}b_{12}b_{21}}, \tag{19}$$

тогда, из того что $y_{22}=0$ получаем:

$$a_{11}-2k=0. \tag{20}$$

Т. о. будем иметь $(A+K)=XY=YX$ и $x_{22}=0$, $y_{22}=0$
Рассмотрим произведение матриц $B=(A+K)(A-K)$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11}+a_{22}-2k) \\ a_{12}a_{22} & a_{12}a_{21}+a_{22}^2-2ka_{22} \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем:

$$b_{11}=a_{12}a_{21};\quad b_{12}=a_{12}a_{22};\quad b_{21}=a_{21}a_{22}. \tag{21}$$

Т. к. $b_{22}=0=a_{12}a_{21}+a_{22}^2-2ka_{22}$, получаем $k=\dfrac{a_{22}^2+a_{12}a_{21}}{2a_{22}}$ (выражение для k можно было бы получить подставив равенства (21) в (19)). С другой стороны из (20) имеем $k=\dfrac{a_{11}}{2}$, т. е. $\dfrac{a_{11}}{2}=\dfrac{a_{22}^2+a_{12}a_{21}}{2a_{22}}$. Откуда получаем:

$$\det A=a_{22}^2. \tag{22}$$

Выражения (21) и (22) есть необходимые условие, чтобы матрица $(A+K)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ разлагалась на коммутативные множители X и Y, у которых $x_{22}=y_{22}=0$.

Чтобы коммутативные множители имели $x_{11}=y_{11}=0$, должны выполняться аналогичные условия $\det A=a_{11}^2$, $k=\dfrac{a_{22}}{2}$, $b_{12}=a_{12}a_{11}$, $b_{21}=a_{21}a_{11}$, $b_{22}=a_{12}a_{21}$.

***Пример* 1**:

Дана матрица $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$, $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{22}^2=\mathbf{1}$. Следовательно её можно разложить на коммутативные множители $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, у которых $\boldsymbol{x}_{22}=\boldsymbol{y}_{22}=\mathbf{0}$. Покажем как это делается. Найдём матрицы $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K})$ и $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K})^{-1}$. Для $\boldsymbol{k}$ получаем значение $\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{a}_{11}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$, тогда $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K})=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-6}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K})^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$. Элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ будут иметь такие значения: $\boldsymbol{b}_{11}=\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}=\mathbf{-6}$; $\boldsymbol{b}_{12}=\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{22}=\mathbf{3}$; $\boldsymbol{b}_{21}=\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{22}=\mathbf{-2}$. Т. е. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-6} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$. И получаем:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{YX}=\begin{pmatrix}\mathbf{-6} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{-6} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}.$$

Пример 2:

Дана матрица $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$, $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{11}^2=\mathbf{4}$.

Следовательно её можно разложить на коммутативные множители $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, у которых $\boldsymbol{x}_{11}=\boldsymbol{y}_{11}=\mathbf{0}$. Имеем $\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{a}_{22}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$, $(\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{K})=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{K})^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_{11}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}_{12}=\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{11}=\mathbf{4}$, $\boldsymbol{b}_{21}=\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{11}=\mathbf{2}$, $\boldsymbol{b}_{22}=\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}=\mathbf{2}$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$.

Получаем такое разложение:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{YX}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}.$$

Напомним читателю, что коммутативность и некоммутативность произведения матриц имеет огромное значение для понимания многих вопросов в окружающей нас природе. В частности речь идёт о законах, которые описываются квантовой механикой, где, например, «таинственное уравнение» Гейзенберга $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i}\cdot\hbar$ построено как раз на некоммутативности матрицы $\boldsymbol{X}$-координаты и матрицы $\boldsymbol{P}$-импульса электрона ([8], стр. 108, 178).

Очевидно, что нахождение коммутативных множителей в разложении матрицы - задача не однозначная. Таких пар может быть бесконечное множества, в зависимости от принятых начальных условий.

Мы также не рассматриваем здесь обратной задачи: по данным коммутативным множителям найти исходную матрицу. Возможно, заинтересованный читатель самостоятельно займётся исследованием этого вопроса.

9. Собственное уравнение матрицы второго порядка

В теории матриц известны такие понятия, как собственные значения и собственные вектора матрицы.

В данной части нашего исследования мы покажем, как связаны собственные значения матрицы и сама матрица. Т. е. будет построено матричное уравнение, в которое входят и данная матрица и её собственные значения. Такое уравнение будем называть собственным уравнением матрицы.

Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\end{pmatrix}$, тогда собственные значения матрицы λ находятся из уравнения: $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\mathbf{0}$ или

$$\lambda^2-\lambda(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})+\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}. \tag{23}$$

Решая уравнение (23) находим собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$.

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})\pm\sqrt{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})^2-\mathbf{4}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}}{\mathbf{2}}. \tag{24}$$

Теперь приступим к построению собственного уравнения матрицы $\boldsymbol{A}$.

Мы помним, что корни квадратные из матрицы второго порядка вычисляются по формуле:

$$\sqrt{\boldsymbol{A}}=\frac{\pm\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}\pm\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}}}\left(\boldsymbol{A}\pm\sqrt{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{E}\right). \tag{25}$$

Введём ещё одно понятие. Матрицей $\boldsymbol{P}$ – будем обозначать произведение сопряжённых корней квадратных из матрицы $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{P}=\frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})^2-\mathbf{4}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}}\left(\boldsymbol{A}^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\right)$$

Выражения (24) перепишем следующим образом:

$$\mathbf{2}\lambda-(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})=\pm\sqrt{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})^2-\mathbf{4}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}, \tag{26}$$

а из (23) находим: $(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})=\dfrac{\lambda^2+\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}{\lambda}$. С учётом этого (26) принимает вид: $\mathbf{2}\lambda-\dfrac{\lambda^2+\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}{\lambda}=\pm\sqrt{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})^2-\mathbf{4}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}$ или

$$\sqrt{(\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22})^2-4\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}=\mp\frac{\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}{\lambda} \tag{27}$$

Подставим (27) в выражение для матрицы $\boldsymbol{P}$ – произведения сопряжённых корней, получим: $\boldsymbol{P}=\pm\dfrac{\lambda}{\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{A}^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\right)$ или

$$\boldsymbol{P}\left(\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\right)=\pm\lambda\left(\boldsymbol{A}^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\right) \tag{28}$$

Уравнение (28) и будем называть *собственным уравнением матрицы* $\boldsymbol{A}$.

Выведем ещё одну, интересную на наш взгляд, формулу.

Обозначим матрицы корней квадратных из $\boldsymbol{A}$ через $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, а собственные значения этих матриц через λ_1 и λ_2 соответственно. Матрицами $\boldsymbol{P}_{11}$ и $\boldsymbol{P}_{22}$ обозначим произведения сопряжённых корней из матриц $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ соответственно. Тогда, используя (28) можем записать:

$$\boldsymbol{P}_{11}\left(\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1\right)=\lambda_1\left(\boldsymbol{P}_1^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{E}\right),$$

$$\boldsymbol{P}_{22}\left(\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2\right)=\lambda_2\left(\boldsymbol{P}_2^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}\right),$$

но $\boldsymbol{P}_1^2=\boldsymbol{P}_2^2=\boldsymbol{A}$. Получаем два выражения для матрицы $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{P}_{11}\dfrac{\lambda_1^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1}{\lambda_1}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{P}_{22}\dfrac{\lambda_2^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2}{\lambda_2}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}$ или можем записать:

$$\boldsymbol{A}=\pm\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{P}_{11}\frac{\lambda_1^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1}{\lambda_1}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}_{22}\frac{\lambda_2^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2}{\lambda_2}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}\right).$$

Сдругой стороны, из (28) имеем: $\boldsymbol{A}=\left(\pm\boldsymbol{P}\dfrac{\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}{\lambda}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\frac{1}{2}}$, и получаем такую формулу:

$$\left(\pm\boldsymbol{P}\frac{\lambda^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}{\lambda}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{P}_{ii}\frac{\lambda_i^2-\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_i}{\lambda_i}+\mathbf{det}\,\boldsymbol{P}_i\cdot\boldsymbol{E}\right). \tag{29}$$

***Приложение* 1**

Мнимые матрицы

(Математическая фантазия с элементарными частицами)

Большую роль в понятии спина элементарной частицы играют спиновые матрицы или матрицы Паули.

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Их свойства:

$$\boldsymbol{S}_1^2 = \boldsymbol{S}_2^2 = \boldsymbol{S}_3^2 = \mathbf{1}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{S}_m \cdot \boldsymbol{S}_n + \boldsymbol{S}_n \cdot \boldsymbol{S}_m = \mathbf{0}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{S}_m \cdot \boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{S}_k \tag{32}$$

Здесь индексы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ пробегают значения 1, 2, 3 и $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица ($\boldsymbol{i}^2 - \mathbf{1}$).

Построим некую конструкцию, обладающую свойствами матриц Паули. Нас будут интересовать в первую очередь свойства (30) и (31).

Рассмотрим вспомогательные матрицы, составленные из мнимых единичных кватернионов ***i, j, k.***

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\mathbf{1} \\ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j} \end{cases} \tag{33}$$

Свойства (33) называются свойствами гиперкомплексных чисел. Кстати сказать, мнимые единичные кватернионы можно представить в матричном виде, используя мнимую единицу комплексных чисел ([7], стр. 20): $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Добавляя к ним единичную матрицу, получаем базис четырёхмерного векторного пространства.

Итак, рассмотрим матрицы $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, которые обладают свойствами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{A}_n = -\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{A}_l \\ \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{A}_m = \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{A}_1^2 = \boldsymbol{A}_2^2 = \boldsymbol{A}_3^2 = \boldsymbol{I} \end{cases}, \text{ где } \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ - единичная матрица.}$$

Используя циклические перестановки между $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, можно получить ещё две тройки матриц $\boldsymbol{B_q}$ и $\boldsymbol{C_q}$, аналогичные матрицам $\boldsymbol{A_q}$, где $\boldsymbol{q} \in \{\boldsymbol{1, 2, 3}\}$.

Опираясь на полученные матрицы, построим матричный базис $\{\boldsymbol{x_1; x_2; x_3}\}$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X_1 = eA_1 + pA_2 + \sqrt{m^2+1}A_3} \\ \boldsymbol{X_2 = eB_1 + pB_2 + \sqrt{m^2+1}B_3} \\ \boldsymbol{X_1 = eC_1 + pB_2 + \sqrt{m^2+1}C_3} \end{cases}, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ определяются значениями элементов матриц $\boldsymbol{E = e \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{P = p \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}$, смысл которых будет определён ниже.

Рассмотрим какими свойствами обладает построенный базис (34).

$$\boldsymbol{X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = \left(-e^2 + p^2 + m^2 + 1\right) \cdot I}. \tag{35}$$

$$\boldsymbol{X_r X_s + X_s X_r = 2\left(e\left(\sqrt{m^2+1} + p\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + p\sqrt{m^2+1} \cdot I\right)}. \tag{36}$$

Нашей целью было построение базиса, для которого справедливы свойства

$$\boldsymbol{X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = I}, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{X_r X_s + X_s X_r = 0}. \tag{38}$$

По аналогии со свойствами (30) и (31).

Пусть значения $\boldsymbol{e, p}$ и $\boldsymbol{m}$ в базисе не что иное, как энергия, импульс и масса покоя элементарной частицы соответственно. Из физики элементарных частиц известно, что

$$\boldsymbol{e^2 = p^2 + m^2} \tag{39}$$

В силу этого закона свойство (35) примет вид (37).

Потребуем, чтобы и свойство (36) удовлетворяло выражению (38), т. е.

$$\boldsymbol{e\left(\sqrt{m^2+1} + p\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + p\sqrt{m^2+1} \cdot I = 0} \tag{40}$$

Заметим, что в уравнениях (39) и (40) $\boldsymbol{m}$ – является константой (масса покоя частицы), а $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{p}$ – переменные. Т. е. условиям (37) и (38) будет отвечать решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} e^2 = p^2 + m^2 \\ e\left(\sqrt{m^2+1} + p\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + p\sqrt{m^2+1}\cdot I = 0 \end{cases}.$$

Построим базисные матрицы для фотона и нейтрино. Известно, что эти частицы имеют массу покоя $m = 0$. Т. о. бедем иметь:

$$\begin{cases} e = p \\ e(1+p)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + p\cdot I = 0 \end{cases}$$

или в матричном виде: $(I + P)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + I = 0$. Откуда можем записать:

$$P\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Т. е. получаем:

$$P\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зная P, можем окончательно построить мнимые (т. к. состоят из мнимых единиц) матрицы базиса $\{x_1; x_2; x_3\}$ в условиях характеристик фотона и нейтрино.

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i+j & i+j-k \\ -i-j+k & -i+j \end{pmatrix}.$$

Перемножив X_1 на X_1 с учётом равенств (33), можно убедитться, что $X_1^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично находим матрицы X_2 и X_3:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -j+k & j+k-i \\ -j-k+i & -j+k \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -k+i & k+i-j \\ -k-i+j & -k+i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица P коммутативна с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим разложение некоторой матрицы A по базисным матрицам X_n.

$$A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 .$$

Т. к. матрицы базиса удовлетворяют условиям (37) и (38), будем иметь:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

Рассмотрим произведение двух матриц $A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$ и $B = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$.

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_2 x_1 x_2 + a_2 b_1 x_2 x_1 + a_1 b_3 x_1 x_3 + a_3 b_1 x_3 x_1 + a_2 b_3 x_2 x_3 + a_3 b_2 x_3 x_2$$

Получаем некий громоздский скаляр. Введём понятие среднего антикоммутативного произведения матриц и обозначим его через

$$\langle AB \rangle = \langle BA \rangle = \frac{AB + BA}{2} .$$

Т. к. $X_n X_m \neq X_m X_n$, то и $AB \neq BA$, но в силу (38) будем иметь:

$$\langle AB \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 , \quad \langle AA \rangle = A^2 , \quad \langle BB \rangle = B^2 .$$

Очевидно, что $\langle (A+B)(A+B) \rangle = \langle AA \rangle + 2\langle AB \rangle + \langle BB \rangle = \langle AA \rangle + 2\langle BA \rangle + \langle BB \rangle$, тогда:

$$\langle (A+B)^2 \rangle = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 . \qquad (41)$$

Не правда ли – это красиво.

***Приложение* 2**

Вывод формул для вычисления корней кубических из матрицы второго порядка

Вывод формулы (3) для вычисления корней квадратных из матрицы второго порядка не сложен и мы его здесь опускаем.

Покажем как выводится формула для вычисления корней кубических из матриц второго порядка.

Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ такая, что $\boldsymbol{X}^3 = \boldsymbol{A}$ и

$$\det(X) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = \sqrt[3]{\det(A)}.$$

Развернув равенство $\boldsymbol{X}^3 = \boldsymbol{A}$, получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}^3 + x_{12}x_{21}x_{11} + x_{12}x_{21}(x_{11} + x_{22}) = a_{11} & \textbf{(42)} \\ x_{11}^2 x_{12} + x_{12}x_{21} + x_{12}x_{22}(x_{11} + x_{22}) = a_{12} & \textbf{(43)} \\ x_{22}^2 x_{21} + x_{12}x_{21}^2 + x_{21}x_{11}(x_{11} + x_{22}) = a_{21} & \textbf{(44)} \\ x_{22}^3 + x_{12}x_{21}x_{22} + x_{12}x_{21}(x_{11} + x_{22}) = a_{22} & \textbf{(45)} \end{cases}$$

Сделаем преобразования уравнения (42).

$$x_{11}^3 + x_{12}x_{21}(2x_{11} + x_{22}) = x_{11}^3 + \left(x_{11}x_{22} - \sqrt[3]{\det(A)}\right)(2x_{11} + x_{22}) = a_{11}.$$

$$x_{11}^3 + 2x_{11}^2 x_{22} - 2x_{11}\sqrt[3]{\det(A)} + x_{11}x_{22}^2 - x_{22}\sqrt[3]{\det(A)} =$$

$$= x_{11}\left(x_{11}^2 + 2x_{11}x_{22} + x_{22}^2\right) - \sqrt[3]{\det(A)}(x_{11} + x_{22}) - x_{11}\sqrt[3]{\det(A)} =$$

$$= x_{11}\left((x_{11} + x_{22})^2 - \sqrt[3]{\det(A)}\right) - (x_{11} + x_{22})\sqrt[3]{\det(A)} = a_{11}$$

Аналогично находим:

$$a_{22} = x_{22}\left((x_{11} + x_{22})^2 - \sqrt[3]{\det(A)}\right) - (x_{11} + x_{22})\sqrt[3]{\det(A)}.$$

Два последних равенства перепишем таким образом:

$$x_{11} = \frac{a_{11} + \sqrt[3]{\det(A)}(x_{11} + x_{22})}{(x_{11} + x_{22})^2 - \sqrt[3]{\det(A)}}, \quad x_{22} = \frac{a_{22} + \sqrt[3]{\det(A)}(x_{11} + x_{22})}{(x_{11} + x_{22})^2 - \sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Сложим левые и правые части полученных выражений:

$$x_{11}+x_{22}=\frac{a_{11}+a_{22}+2\sqrt[3]{\det(A)}(x_{11}+x_{22})}{(x_{11}+x_{22})^2-\sqrt[3]{\det(A)}}, \text{ или}$$

$$(x_{11}+x_{22})^3-\sqrt[3]{\det(A)}(x_{11}+x_{22})=a_{11}+a_{22}+2\sqrt[3]{\det(A)}(x_{11}+x_{22}).$$

Обозначив $x_{11}+x_{22}=t$, получаем характеристическое уравнение:

$$t^3-3t\sqrt[3]{\det(A)}-(a_{11}+a_{22})=0. \tag{46}$$

Решив это уравнение, можно найти t, и далее x_{11} и x_{22}, где

$$x_{11}=\frac{a_{11}+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\ x_{22}=\frac{a_{22}+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Из уравнений (43) и (44) находим:

$$x_{12}=\frac{a_{12}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}},\ x_{21}=\frac{a_{21}}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}.$$

Получаем общую формулу:

$$\sqrt[3]{A}=\frac{1}{t^2-\sqrt[3]{\det(A)}}\left(A+t\cdot\sqrt[3]{\det(A)}E\right), \tag{47}$$

при $t^2-\sqrt[3]{\det(A)}\neq 0$.

***Пример*:**

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$**.** Вычислить корни кубические из данной матрицы.

$$\det(A)=1.$$

Имеем такое характеристическое уравнение: $t^3-3t-2=0$. Дискриминант этого уравнения равен нулю. Действительно,

$$D=\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{27}{27}}=0,$$

здесь q = **-2**, а p = **-3**. Из общей теории решений уравнений третьей степени известно, что если дискриминант равен нулю, все корни данного уравнения будут действительными числами, причём два из этих корней равны между собой.

Решая характеристическое уравнение находим $t_1=2$, $t_2=t_3=-1$.

Два последних корня нам не подходят, так в этом случае знаменатель в формуле (47) превращается в нуль.

Таким образом, получаем единственное решение нашего примера.

$$\sqrt[3]{\boldsymbol{A}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4-1}}\begin{pmatrix} \mathbf{2+2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что это действительно так, т. е.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

Необходимо сделать следующее замечание. Мы взяли $\sqrt[3]{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} = \mathbf{1}$ На самом деле, кроме единицы $\sqrt[3]{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}$ имеет ещё два комплексных значения. И в итоге мы получили бы ещё два решения нашего примера, но элементами, полученных в решении матриц, были бы комплексные числа. Мы не будем здесь заниматься этими громоздскими и неинтересными вычислениями. Каждый заинтересованный это может проделать самостоятельно.

***Приложение* 3**

К вопросу о вычислении корней квадратных и кубических из комплексного числа

Существует универсальная формула Муавра для вычисления корня любой степени из комплексного числа. Для применения этой формулы необходимо комплексное число $\boldsymbol{z = a + ib}$ представить в тригонометрическом виде ([5], стр. 17).

Кроме того известны две формулы для извлечения корня квадратного из комплексного числа в алгебраической форме.

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right), \text{ если } b \geq 0 \text{ и}$$

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right), \text{ если } b < 0,$$

здесь $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа.

Известно, что правила алгебры комплексных чисел $z = a + ib$ изоморфны правилам алгебры матриц второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Зная формулу (3) для извлечения корня квадратного из матриц, можно построить формулу для извлечения корня квадратного из комплексного числа в алгебраической форме. В нашем случае будем иметь:

$$\sqrt{A} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\left(a \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)}}\begin{pmatrix} a \pm \sqrt{a^2+b^2} & -b \\ b & a \pm \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2\left(a \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)}}\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \pm \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Тогда для комплексного числа $z = a + ib$ автоматически получаем аналогичную формулу:

$$\sqrt{z} = \pm\frac{z \pm r}{\sqrt{2(a \pm r)}} \qquad (48)$$

Как видим, формула (48) значительно проще, показанных выше двух формул.

***Пример*:**
Дано число $z = 4 + i3$. Надо вычислить его корень квадратный.

Применим формулу (48), зная что $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Получаем:

$$\sqrt{z} = \pm\frac{4 + i3 \pm 5}{\sqrt{2(4 \pm 5)}} = \pm\frac{3 + i}{\sqrt{2}}.$$

Формула (48) применима для любого $\boldsymbol{b}$, как положительного так и отрицательного. По существу, формула (48) является своеобразным обобщением ранее показанных двух формул.

Для извлечения корня кубического из комплексного числа построим формулы аналогичные формулам (46) и (47)

$$\sqrt[3]{z} = \frac{1}{t^2 - \sqrt[3]{r^2}}\left(z + t\sqrt[3]{r^2}\right) \tag{49}$$

$$t^3 - 3t\sqrt[3]{r^2} - 2a = 0 \tag{50}$$

Здесь $\boldsymbol{t}$ находится из характеристического уравнения (50).

Справедливости ради надо сказать, что формула (49) малоэффективна, т. к. всё упирается в решение характеристического уравнение, где приходится применять формулы Кардано, которые в свою очередь также громоздски и малоэффективны.

***Пример*:**
Вычислить корни кубические из мнимой единицы, т. е. имеем $z = i$.

Получаем такое характеристическое уравнение: $t^3 - 3t = 0$. Его решениями будут числа $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$. Подставляя эти значения в (49), находим три корня кубических из мнимой единицы: $-i$, $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$ и $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$.

***Приложение* 4**

К вопросу о вычислении корней квадратных и кубических из кватернионов

Известно ([6], стр. 28), что алгебра кватернионов $z = a + ib + jc + kd$ изоморфна алгебре матриц второго порядка, представимых в виде $A = aE + ibS_1 + icS_2 + idS_3$, где S_1, S_2 и S_3 - известные матрицы Паули, E – единичная матрица.

Модуль кватерниона принято обозначать через $|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

В развёрнутом виде матрица A имеет такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} a + id & bi + c \\ bi - c & a - id \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\det(A) = |\,z\,|^2$.

Корни квадратные для таких матриц находятся по формуле:

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(a \pm |\,z\,|)}} \left(A \pm |\,z\,| E\right).$$

Переходя к кватернионам, получаем такую формулу для вычисления корней квадратных:

$$\sqrt{z} = \pm \frac{z \pm |\,z\,|}{\sqrt{2(a \pm |\,z\,|)}} . \tag{51}$$

***Пример*:**
Извлечь корни квадратные из кватерниона $z = 1 + i + j + k$.

Модуль кватерниона равен $|\,z\,| = 2$. Используя формулу (51), находим такие значения корней квадратных:

$$\sqrt{z}_1 = \frac{3 + i + j + k}{\sqrt{6}}, \qquad \sqrt{z}_2 = \frac{1 - i - j - k}{\sqrt{-2}}$$

Формулы для вычисления корней кубических из кватернионов выглядят точно также, как и формулы (49) и (50), в них только надо заменить модуль комплексного числа на модуль кватерниона.

$$\sqrt[3]{z} = \frac{1}{t^2 - \sqrt[3]{|\,z\,|^2}} \left(z + t\sqrt[3]{|\,z\,|^2}\right) \tag{52}$$

$$t^3 - 3t\sqrt[3]{|\,z\,|^2} - 2a = 0 \tag{53}$$

Пример:
Вычислить корни кубические простейшего векторного кватерниона, т. е $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Модуль данного кватерниона равен $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{3}}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\boldsymbol{t}^3 - 3\boldsymbol{t}\sqrt[3]{\mathbf{3}} = \mathbf{0}$, корнями его будут числа $\boldsymbol{t}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{t}_2 = \sqrt{\mathbf{3}\sqrt[3]{\mathbf{3}}} = \mathbf{3}^{\frac{2}{3}}$, $\boldsymbol{t}_3 = -\mathbf{3}^{\frac{2}{3}}$. Подставляя эти значения в (52), получаем выражения для кубических корней данного кватерниона.

$$\sqrt[3]{\boldsymbol{z}}_1 = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{-\sqrt[3]{\mathbf{3}}}, \qquad \sqrt[3]{\boldsymbol{z}}_2 = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} + \mathbf{3}}{\mathbf{3}^{\frac{4}{3}} - \mathbf{3}^{\frac{1}{3}}}, \qquad \sqrt[3]{\boldsymbol{z}}_3 = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \mathbf{3}}{\mathbf{3}^{\frac{4}{3}} - \mathbf{3}^{\frac{1}{3}}}.$$

Умножение кватернионов не коммутативно, поэтому надо помнить такие правила: $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\mathbf{1}$.

Для тех, кто захочет проверить результаты наших вычислений, полезно также знать, что $(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})^2 = -\mathbf{3}$.

Извлечение корня кубического из комплексного числа имеет геометрическую интерпретацию. Каждый из корней может быть представлен вектором. Все они выходят из начала координт на плоскости и повёрнуты друг относительно друга на 120°.

Кватернионы же существуют в четырёхмерном пространстве и какова геометрическая интерпретация результата операции извлечения кубического корня трудно представить.

Литература

1 Ф. Бахман, «Постороение геометрии на основе понятия симметрии», М., «Наука», 1969

2 Ю. С. Владимиров, «Метафизика», М., «БИНОМ», 2002

3. П. Ланкастер, «Теория матриц», М., «Наука», 1982

4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц», М., «Наука», 1988

5. К. У. Шахно, «Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления», Минск, «Высшая щкола», 1975

6. Э. Маделунг, «Математический аппарат физики», М., «Наука», 1968

7. А. Бредон, «Геометрия дискретных групп», М., «Наука», 1986

8. Л. И. Пономарёв, «Под знаком кванта», М., «Советская Россия», 1984