Франц Герман

Уравнение геометрической «телепортации»

Известно [1], что на действительной проективной плоскости $\boldsymbol{RP^2}$ ввести понятие метрики (расстояния между двумя точками) можно, например, при помощи метода Кэли-Клейна. Вообще этим методом можно индуцировать многие геометрии [2]. Выбрав на $\boldsymbol{RP^2}$ кривую второго порядка в качестве инварианта проективного преобразования плоскости (абсолюта), индуцируется сразу две геометрии. Внутри абсолюта получается гиперболическая геометрия (Лобачевского и др.), снаружи – эллиптическая геометрия (Римана и др.) (Рис. 1).

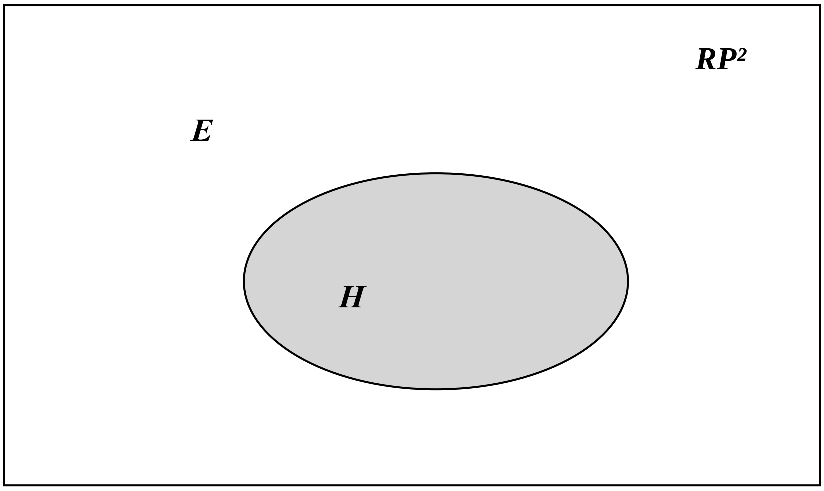

Рис. 1

Буквой $\boldsymbol{H}$ будем обозначать гиперболическую метрику, а буквой $\boldsymbol{E}$ – эллиптическую.

При этом выбраться из абсолюта, перемещаясь по плоскости невозможно, точно также как и проникнуть в абсолют извне [1].

Зададим абсолют простейшим уравнением действительной кривой второго порядка $\boldsymbol{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0}$ (уравнения всех линий второго порядка есть, например, в [3], стр. 386). Введём понятие квазискалярного произведения двух точек, принадлежащих абсолюту, по формуле (в соответствии с нашей действительной кривой второго порядка):

$$\boldsymbol{x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0}$$

Также введём понятие квазискалярного произведения двух точек на проективной плоскости аналогично квазискалярному произведению для точек на абсолюте.

Рассмотрим две точки на проективной плоскости $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Не нарушая общности, однородные координаты точек можно задать следующим образом: $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : 1)}$ и $\boldsymbol{Y(y_1 : y_2 : 1)}$. Тогда квазискалярное произведение двух точек $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ будет вычисляться по формуле:

$$\boldsymbol{X \circ Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 + 1}$$

Аналогично введём также понятие собственного квазискалярного произведения точки:

$$\boldsymbol{X \circ X = x_1^2 - x_2^2 + 1}.$$

Для обозгачения операции скалярного произведения будем использовать значок: «∘».

В дальнейшем для краткости записи квазискалярные произведения будем обозначать следующим образом: $\boldsymbol{X \circ X = a}$, $\boldsymbol{Y \circ Y = b}$, $\boldsymbol{X \circ Y = c}$. В этих обозначениях метрики, полученных геометрий, будут иметь формулы:

$$\boldsymbol{H = ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}}\right)} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E = arccos\left(\frac{c'}{\sqrt{a'\,b'}}\right)} \tag{2}$$

Здесь все величины ***a, b, c*** должны иметь отрицательные значения, т. к. точки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ находятся внутри абсолюта ([4], стр. 263) и $\boldsymbol{c^2 > bc}$ ([5], стр. 323) а величины $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{b'}$ и $\boldsymbol{c'}$ - положительные, причём, в силу области определения функции арккосинуса должно быть $\boldsymbol{c' < \sqrt{a'\,b'}}$. Т. о., квазискалярные произведения накладывают ограничения на выбор точек для данного абсолюта.

Покажем, что вводя некоторую псевдогиперболическую (мнимую) геометрию с метрикой $\boldsymbol{\overline{H}}$, всё-таки можно телепортировать отрезок прямой из области внути абсолюта во внешнюю область на ***RP²***.

Введём обозначение: $\boldsymbol{H = ln(h)}$.

Новую псевдогиперболическую метрику будем строить следующим параметрическим образом. Пусть

$$\boldsymbol{\overline{H} = ln\left(\frac{c^2 + k^2}{(c' + i \cdot k)^2}\right)}, \tag{3}$$

здесь $\boldsymbol{c^2 + k^2 = h}$ и $\boldsymbol{c' = \left|\sqrt{c^2}\right|}$.

Выражение (3) можем записать и так:

$$\boldsymbol{\overline{H} = ln\left(\frac{c' - i \cdot k}{c' + i \cdot k}\right)} \tag{4}$$

Рассмотрим две точки $\boldsymbol{X'(x'_1 : x'_2 : 1)}$ и $\boldsymbol{Y'(y'_1 : y'_2 : 1)}$ из внешней области абсолюта. Первую точку возьмём таким образом, чтобы $\boldsymbol{X' \circ X' = a' > 0}$. Тогда координаты второй точки можно найти решая уравнение:

$$\begin{cases}(y'_1)^2-(y'_2)^2=\dfrac{c^2+k^2}{a'}-1\\ x'_1\,y'_1-x'_2\,y'_2=c'-1\end{cases}, \tag{5}$$

здесь $\dfrac{c^2+k^2}{a'}=b'$. Т. к. координаты x'_1 и x'_2 известны, то система (5) является системой двух уравнений с двумя неизвестными. Решая (5) находим y'_1 и y'_2.

На этом можно было бы закончить наше исследование, т. к. мы построили отрезок во внешней части абсолюта, соответствующий заданному отрезку внутри абсолюта. Но хотелось бы определить уравнение, связывающее метрики $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Теперь можем записать параметр $\boldsymbol{k}$ в таком виде:

$$k^2=a'\,b'-c^2=-\left(c^2-a'\,b'\right),\qquad k=i\sqrt{c^2-a'\,b'}\ .$$

С учётом того, что $c^2=\left(c'\right)^2$ и известна формула параметра $\boldsymbol{k}$, выражение (4) принимает вид:

$$\overline{H}=ln\left(\frac{c'+\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}}{c'-\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}}\right) \tag{6}$$

Т. о., выражение (2) и (6) являются функциями одних и тех же трёх параметров. Заметим, что из $k=i\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}$ и $c'<\sqrt{a'\,b'}$ величина $\boldsymbol{k}$ должна быть отрицательна. Теперь найдём связь между выражениями (2) и (6).

Из выражения (2) можем записать:

$$cos\left(E\right)=\frac{c'}{\sqrt{a'\,b'}}, \tag{7}$$

тогда $$sin\left(E\right)=\sqrt{1-cos^2\left(E\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{c'}{\sqrt{a'\,b'}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a'\,b'-\left(c'\right)^2}{a'\,b'}}$$ или

$$-i\cdot sin\left(E\right)=\frac{\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}}{\sqrt{a'\,b'}}.$$

Теперь вычислим выражения $cos\left(E\right)-i\cdot sin\left(E\right)$ и $cos\left(E\right)+i\cdot sin\left(E\right)$. Получаем:

$$cos\left(E\right)-i\cdot sin\left(E\right)=\frac{c'+\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}}{\sqrt{a'\,b'}}$$

$$cos\left(E\right)+i\cdot sin\left(E\right)=\frac{c'-\sqrt{\left(c'\right)^2-a'\,b'}}{\sqrt{a'\,b'}}.$$

Разделим первое выражение на второе мы получаем выражение $e^{\overline{H}}$ или:

$$\frac{\cos(E)-i\cdot\sin(E)}{\cos(E)+i\cdot\sin(E)}=\frac{(\cos(E)-i\cdot\sin(E))\cdot(\cos(E)-i\cdot\sin(E))}{(\cos(E)+i\cdot\sin(E))\cdot(\cos(E)-i\cdot\sin(E))}=\cos(2E)-i\cdot\sin(2E).$$

Преобразуем последнее выражение с использованием формулы Эйлера $e^{iw}=\cos(w)+i\cdot\sin(w)$. Тогда

$$\cos(2E)-i\cdot\sin(2E)=-\exp(i\cdot(\pi-2E)). \tag{8}$$

Откуда можем записать: $\exp(\overline{H})=-\exp(i\cdot(\pi-2E))=-\dfrac{\exp(i\cdot\pi)}{\exp(i\cdot 2E)}$. С учётом того, что $\exp(i\cdot\pi)=-1$, получаем $\exp(\overline{H})=\dfrac{1}{\exp(i\cdot 2E)}$ или окончательно: $\exp(\overline{H})\cdot\exp(i\cdot 2E)=\exp(\overline{H}+i\cdot 2E)=1$.

Последнее выражение можно переписать таким образом:

$$\frac{i}{2}\overline{H}=E \tag{9}$$

Из выражения (3) имеем: $\overline{H}=\ln(c^2+k^2)-2\ln(c'+i\cdot k)=H-2\ln(c'+i\cdot k)$.

Мы помним, что $k=i\sqrt{c^2-a'b'}$ и $a'b'=c^2+k^2=h=e^H$. Теперь можем записать:

$$\boxed{E(x'_1,x'_2)=\frac{i}{2}\cdot H(x_1,x_2,y_1,y_2)-i\cdot\ln\left(\left|\sqrt{c^2}\right|-\sqrt{c^2-e^H}\right)} \tag{10}$$

Последнее уравнение будем называть *уравнением телепортации*. Т. о., задавая координаты двух произвольных точек X и Y из области внутри абсолюта можно вычислить эллиптическую метрику. Задавая точку X' в эллиптическом пространстве (вне абсолюта) и используя формулу (7) вычисляем значение квазискалярного произведения b'. И затем, решая систему уравнений :

$$\begin{cases}(y'_1)^2-(y'_2)^2=b'-1\\ a_1y'_1-a_2y'_2=c'-1\end{cases}, \tag{11}$$

находим координаты точки Y'. Здесь $x'_1=a_1$, $x'_2=a_2$ - координаты точки X'.

Две точки определяют прямую. По сути дела, мы телепортировали прямую из гиперболической геометрии в эллиптическую посредством некоторой промежуточной псевдогиперболической геометрии с метрикой $\overline{H}$ (Рис. 2). Заметим, что метрика $\overline{H}$ является чисто мнимой величиной (см. [6], стр. 58 и [7], стр.150).

Обратный путь гораздо проще в плане вычислений координат точек. Задавая две точки в эллиптическом пространстве, находим квазискалярные произведения a', b' и c'. Мы помним, что $c=-c'$, $h=a'b'$, и $h=\dfrac{c+\sqrt{c^2-ab}}{c-\sqrt{c^2-ab}}$. Задавая некоторую точку

$X(a_1 : a_2 : 1)$ в гипербплическом пространстве (внутри абсолюта) можно вычислить b по формуле:

$$b = \frac{4c^2 h}{a(h+1)^2}. \quad (12)$$

При этом мы должны помнить, что выбор точки X должен осуществляться таким образом, чтобы квазискалярное произведение a было величиной отрицательной. Зная b, вычисляем координаты второй точки Y из системы уравнений:

$$\begin{cases} (y_1)^2 - (y_2)^2 = b - 1 \\ a_1 y_1 - a_2 y_2 = c - 1 \end{cases}. \quad (13)$$

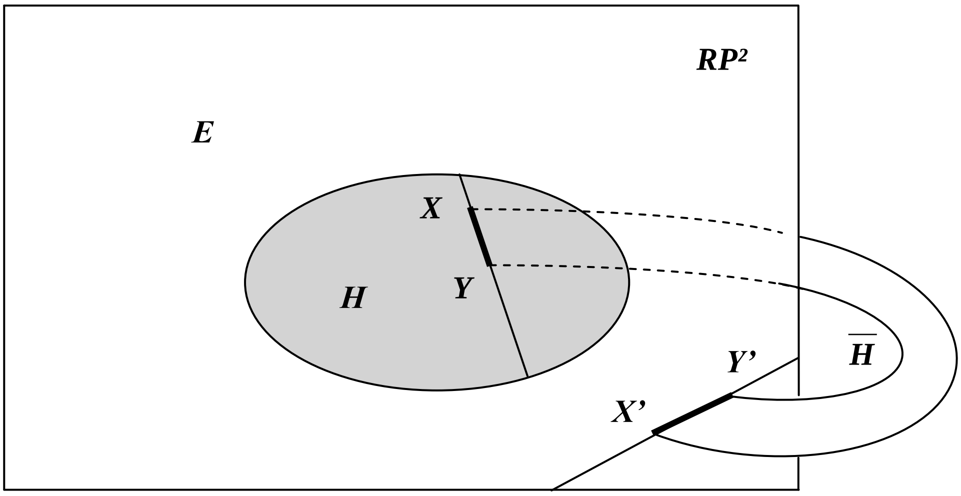

Рис. 2

Анализируя решения систем (11) и (13) находим дополнительные ограничения на выбор координат точек соответственно для X' и X. В первом случае если $b' < 1$, то должно выполняться условие $|a'_2| > |a'_1|$. Во втором случае при любом b должно выполняться условие $|a_2| > |a_1|$.

Используя (12) и параметр k можно получить явную формулу, связывающую в рамках нашего исследования гиперболическую и эллиптическую метрики:

$$cos^2(E) + \frac{k^2}{e^H} = 1, \quad (14)$$

здесь $E = E(a', b', c')$, а $H = H(a, b, c)$.

Теперь надо пояснить: откуда появилась необходимость такого исследования.

Расмотрим сферу и взятую на ней окружность (Рис. 3).

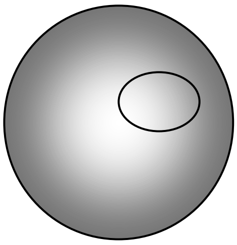

Рис. 3

Интуитивно мы понимаем, что называется внутренней областью окружности на сфере, а что наружной.

Предположим, что окружность равномерно увеличивается (натягивается на сферу). В какойто то момент наша окружность достигнет размеров большого круга взятой сферы. А потом снова начнёт уменьшаться. Получается, что в этом случае внутреняя область окружности и наружная поменялись местами. Дело в том, что сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками является моделью проективной плоскости ([8], стр. 503, кстати сказать, такую же модель используют и для описания эллиптического пространства [9], стр. 270, а общее определение проективного пространства можно найти в [10], стр. 81). Выходит, что индуцированные геометрии на модели проективной плоскости могут меняться ролями. Другими словами, должна существовать аналитическая связь между метриками этих геометрий (аналитическое выражение метрики для проективной плоскости впервые было получено Лагерром ([11], стр. 286, а полный вид формулы Лагерра дан в [12], стр.300).

Такие рассуждения и явились побудительным мотивом к настоящему исследованию.

В заключение рассмотрим два тора (Рис. 4)

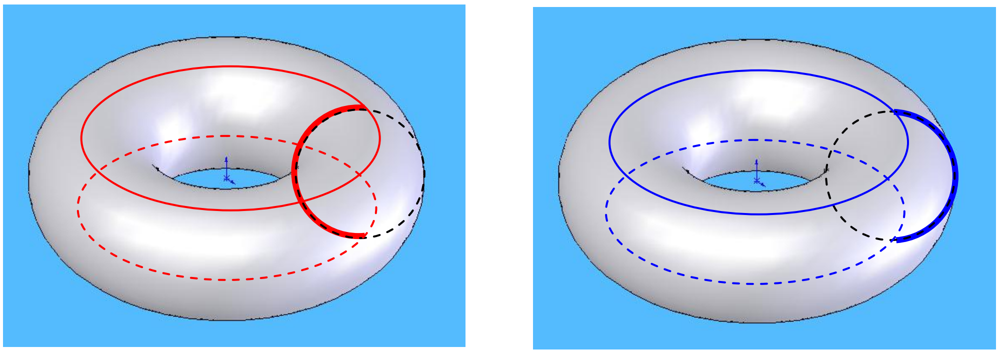

Рис. 4

Известно (см. например [13] стр. 448), что точки внутренней части тора, заметаемой красной полуокружностью (Рис. 4, слева) при её вращении вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии тора, являются гиперболическими. Т. е. геометрия этой части тора является гиперболической (окружности, заметаемые точками на концах красной полуокружности исключаются, т. к. точки этих окружностей являются параболическими).

Внешняя часть тора, заметаемая синей полуокружностью (Рис. 4, справа) без конечных точек, имеет эллиптическую геометрию.

Можем пофантазировать и предположить, что именно так будут выглядеть в будущем модели телепортационных камер, переносящие предметы с внутренней части тора, показанного на Рис. 4 слева, на внешнюю часть правого тора и наоборот.

Кстати, существует модель Розенфельда ([14], стр. 341) проективной плоскости в виде цилиндра с отождествлёнными центрально симметричными точками. Остаётся придумать только, как такой цилиндр превратить в тор.

Литература

1. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «От проективной геометрии – к неевклидовой», М., «Просвещение», 1979

2. И. М. Яглом, «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия», М., «НАУКА», 1969

3. Н. В. Ефимов. «Высшая геометрия», М., «Наука», 1971

4. Я. П. Понарин, «Аффинная и проективная геометрия», М., «МЦНМО», 2009

5. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия», Часть 2, М., «Просвещение, 1987

6. К. У. Шахно, «Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления», Минск, «Высшая школа», 1975

7. И. П. Егоров, «Геометрия», М., «Просвещение», 1979

8. Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн, «Линейная алгебра и многомерная геометрия», М., «НАУКА», 1974

9. Б. А. Розенфнльд, «История невклидовой геометрии», М., «НАУКА», 1976

10. А. П. Норден, «Пространства афинной связности», М., «НАУКА», 1976

11. Г. Буземан, П. Келли, «Проективная геометрия и проективные метрики», М., издательство «ИЛ», 1957

12. Н. А. Глаголев, «Проективная геометрия», М., «Высшая школа», 1963

13. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990

14. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966