Франц Герман

Теорема о поляре трёхвершинника

(franz.h-n@yandex.ru)

Теорема: **Если дан произвольный трёхвершинник и произвольная коника, то точки пересечения сторон трёхвершинника и поляр противоположных вершин лежат на одной прямой.**

Эту прямую мы и будем называть полярой данного трёхвершинника относительно данной коники.

Итак, рассмотрим произвольный трёхвершинник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ и произвольную конику $\boldsymbol{G}$ (Рис. 1).

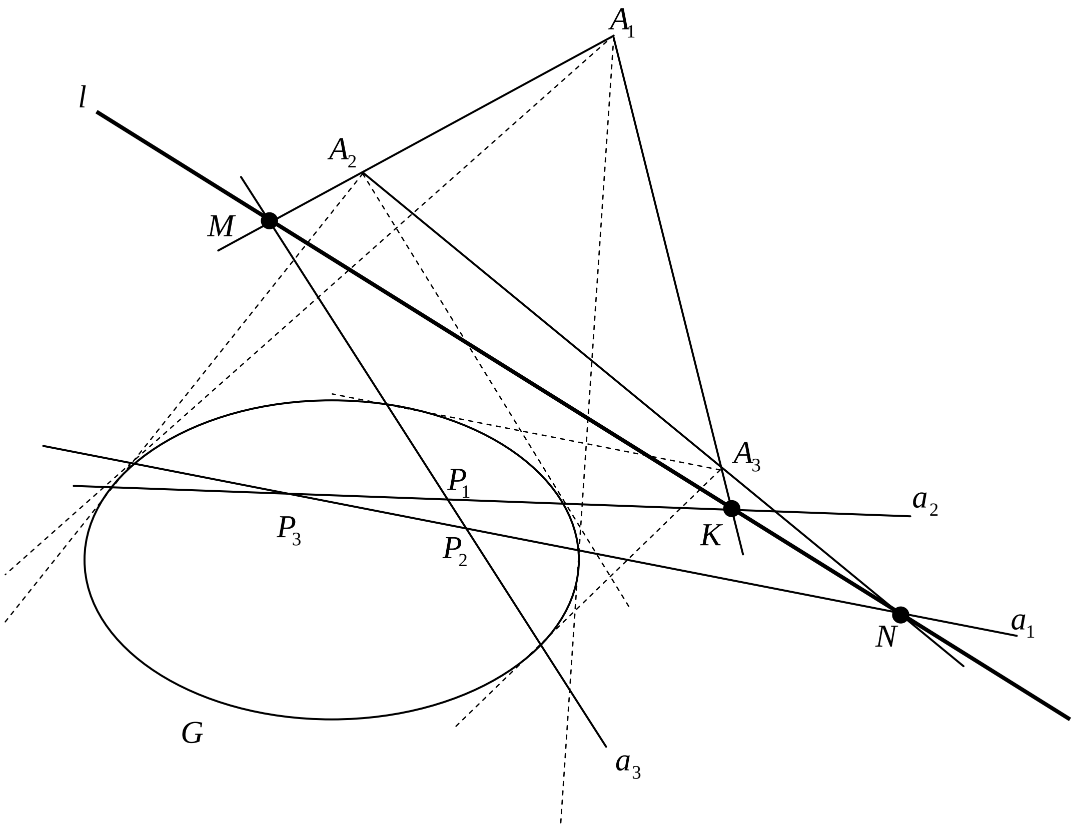

Рис. 1

Пунктирными линиями показано построение поляр.

$\boldsymbol{a_1}$ - поляра вершины $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{N \equiv (A_2 A_3 \cap a_1)}$.

$\boldsymbol{a_2}$ - поляра вершины $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{K \equiv (A_1 A_3 \cap a_2)}$.

$\boldsymbol{a_3}$ - поляра вершины $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{M \equiv (A_1 A_2 \cap a_3)}$.

Докажем, что точки $\boldsymbol{N, K, M}$ лежат на одной прямой $\boldsymbol{l}$ - поляре трёхвершинника.

Автор не ставил своей целью найти короткое и красивое доказательство. Задача стояла – доказать теорему.

Доказательство:

Как известно произвольная коника имеет в общем виде такое уравнение:

$$G:\ \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3} g_{ij}x_i\,x_j = 0 \text{ или } g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Пусть трёхвершинник $A_1A_2A_3$ определяет проективный репер $\{A_1, A_2, A_3, E\}$, т. е. $A_1(1:0:0)$; $A_2(0:1:0)$; $A_3(0:0:1)$; $E(1:1:1)$. Тогда уравнение поляры точки A_3 будет иметь вид:

$$g_{11}\cdot 0\cdot x_1 + g_{22}\cdot 0\cdot x_2 + g_{33}\cdot 1\cdot x_3 + g_{12}(x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0) + g_{13}(x_1\cdot 1 + x_3\cdot 0) + g_{23}(x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0) =$$
$$= g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_2 в данном репере будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0 \end{cases},$$

найдём координаты точки $M(g_{23} : -g_{13} : 0)$.

Аналогично находятся координаты точек $K(g_{23} : 0 : -g_{12})$ и $N(0 : g_{13} : -g_{12})$.

Убедимся, что точки N, K, M лежат на одной прямой, т. е. определитель, составленный из координат этих точек должен быть равен нулю. Действительно:

$$\begin{vmatrix} g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \\ 0 & g_{13} & -g_{12} \end{vmatrix} = g_{23}g_{12}g_{13} - g_{23}g_{12}g_{13} = 0.$$

Найдём уравнение поляры тругольника.

$$l:\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \end{vmatrix} = x_1g_{12}g_{13} + x_2g_{12}g_{23} + x_3g_{13}g_{23} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{x_1}{g_{23}} + \frac{x_2}{g_{13}} + \frac{x_3}{g_{12}} = 0 \text{ при } g_{12} \neq g_{13} \neq g_{23} \neq 0$$

Как и для всякой теоремы проективной геометрии справедлива двойственная ей

Теорема: **Если дан пройзвольный трёхвершинник и произвольная коника, то прямые, проходящие через вершины трёхвершинника и полюсы противоположных сторон, пересекаются в одной точке.**

Мы будем называть эту точку полюсом данного трёхвершинника относительно данной коники.

Доказательство:

Введём обозначения:

$$P_1 \equiv (a_2 \cap a_3) \text{ - полюс } A_2 A_3$$

$$P_2 \equiv (a_1 \cap a_3) \text{ - полюс } A_1 A_3$$

$$P_3 \equiv (a_1 \cap a_2) \text{ - полюс } A_1 A_2$$

Рассмотрим трёхвершинники $A_1 A_2 A_3$ и $P_1 P_2 P_3$. $(P_1 P_2 \cap A_1 A_2) \equiv M$; $(P_1 P_3 \cap A_1 A_3) \equiv K$; $(P_2 P_3 \cap A_2 A_3) \equiv N$, но точки ***N, K, M*** лежат на одной прямой, следовательно, по теореме Дезарга, прямые $A_1 P_1$, $A_2 P_2$ и $A_3 P_3$ пересекаются в одной точке S. Что и требовалось доказать.

Следствие: точка S является полюсом прямой l относительно данной коники.

Доказательство:

Точка $K \in A_1 A_3$, точка P_2 является полюсом прямой $A_1 A_3$, следовательно точка K сопряжена с точкой P_2. Также точка $K \in a_2$, следовательно K сопряжена с точкой A_2. Следовательно точка K является полюсом прямой $A_2 P_2$. Рассуждая аналогично, можно показать, что точка M является полюсом прямой $A_3 P_3$. Но $S \equiv (A_2 P_2 \cap A_3 P_3)$, следовательно S сопряжена с точкой K и с точкой M, а т.к. $K \in l$ и $M \in l$, то точка S является полюсом прямой l. Что и требовалось доказать.

Примеры задач, при решении которых используется теорема «о поляре трёхвершинника»

Предполагается, что задачи на построение могут быть использованы не только для работы со сдудентами, и для факультативных работ со школьниками. Поэтому в рамках этой темы мы будем пользоваться школьной терминологией, используя иногда вместо слов «коника» и «трёхвершинник» привычные в школе термины: «окружность» и «треугольник».

Задача 1. Дана прямая ***AC***, точка ***C*** и точка ***B*** и поляры точек ***A***, ***B***, ***C*** относительно некоторой коники.
Построить точку ***A***.

Решение :

Обозначим на рисунке (Рис. 2) прямую ***AC*** – ***(ac)***, поляры точек ***A, B***, ***C*** буквами ***a***, ***b***, ***c*** соответственно.

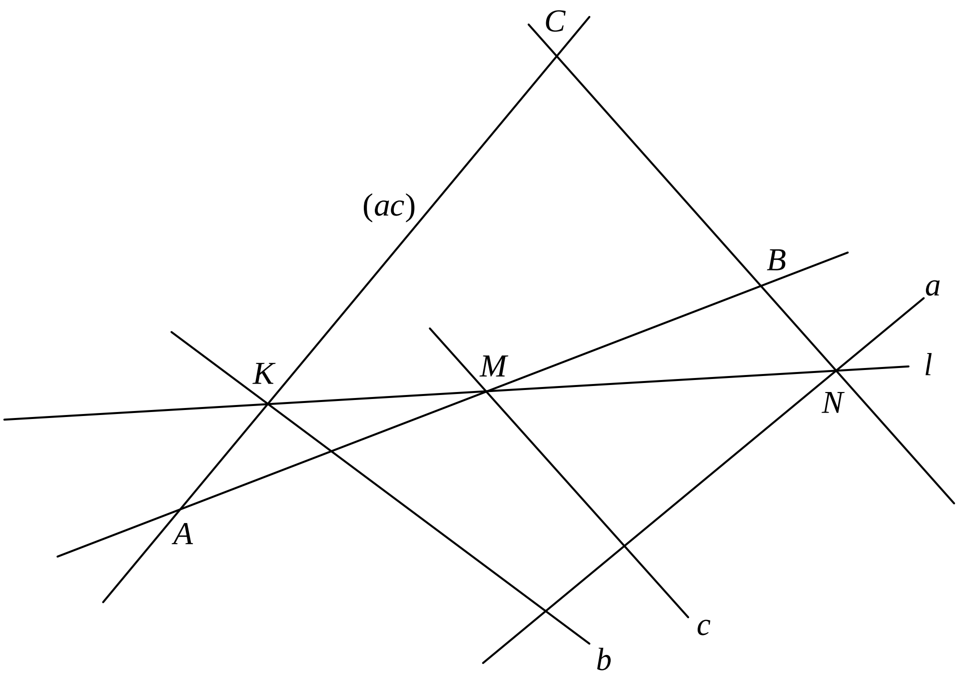

Рис. 2

Построим поляру треугольника ***ABC***. Обозначим её - ***l***. Для этого найдём точку пересечения $\boldsymbol{N \equiv (CB \cap a)}$ и точку пересечения $\boldsymbol{K \equiv ((ac) \cap b)}$. Прямая ***l*** пройдёт через эти точки.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая ***AB*** должна пересекать поляру ***c*** в точке $\boldsymbol{M \in l}$, т.е. $\boldsymbol{M \in AB}$. Проведём ***MB*** до пересечения с прямой ***(ac)***. Это и будет искомая точка ***A***.

Задача 2. Даны точки ***A***, ***B***, ***C*** и поляры точек ***A*** и ***B***. И также одна точка, принадлежащая поляре точки ***C*** (все полярные отношения заданы относительно одной и той же некоторой коники).
Построить поляру точки ***C***.

Решение:

Обозначим поляры точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно (Рис. 3). Построим поляру $\boldsymbol{l}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

$$(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{BC}) \equiv \boldsymbol{M}; \quad (\boldsymbol{b} \cap \boldsymbol{AC}) \equiv \boldsymbol{K}; \quad \boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{MK}.$$

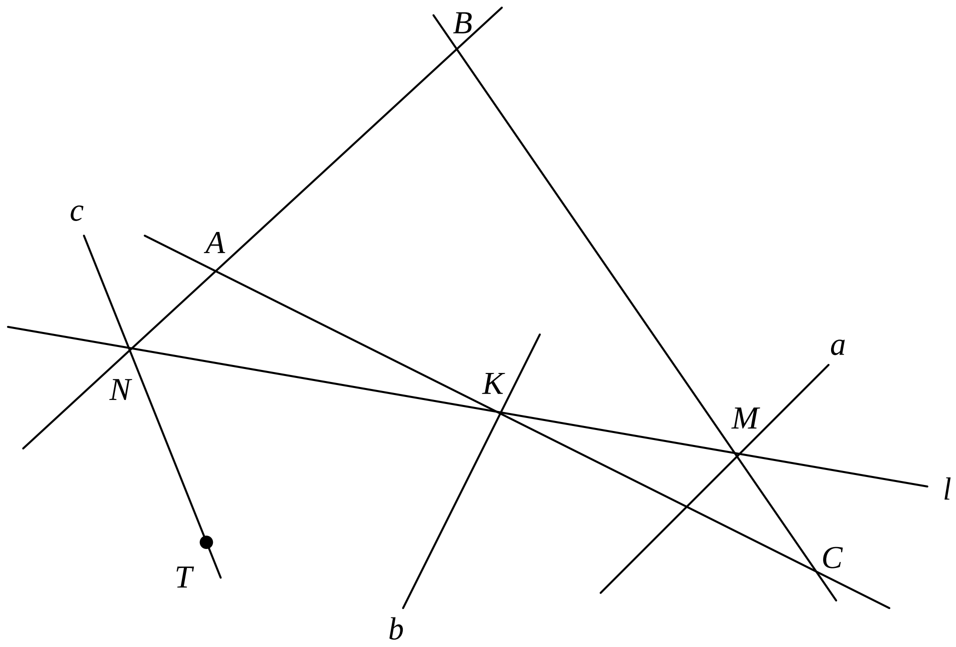

Рис. 3

Обозначим точку, принадлежащую поляре точки $\boldsymbol{C}$, через $\boldsymbol{T}$. $(\boldsymbol{AB} \cap \boldsymbol{l}) \equiv \boldsymbol{N}$, тогда, в силу теоремы «о поляре тругольника», поляра $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{TN}$.

Задача 3. Даны две прямые и точка, принадлежащая третьей, а также – три поляры точек пересечения этих трёх прямых, относительно некоторой коники. Построить третью прямую.

Решение:

Обозначим точку пересечения данных прямых через $\boldsymbol{A}$, а поляру, ей соответствующую, через $\boldsymbol{a}$. Данные прямые обозначим через ***(ac)*** и ***(ab)***.

Будем считать, что точка $\boldsymbol{C}$ принадлежит прямой ***(ac)***, а точка $\boldsymbol{B}$ - прямой ***(ab)*** соответственно, и $\boldsymbol{CB}$ является искомой прямой. Тогда данные поляры, соответствующие точкам $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}$, обозначим соответственно через $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$ (Рис. 4).

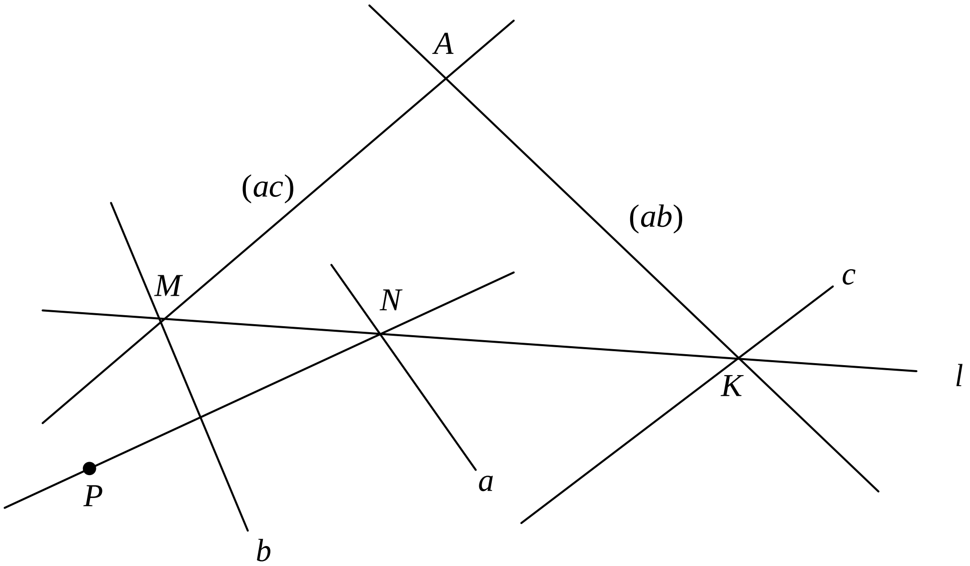

Рис. 4

$((ac)\cap b)\equiv M,\ \ ((ab)\cap c)\equiv K$, тогда $l\equiv MK$ - поляра треугольника ABC. В силу теоремы «о поляре треугольника» $(a\cap l)\equiv N$ и $N\in BC$, но по условию задачи точка P также принадлежит прямой BC. Следовательно прямая PN и является искомой прямой.

Задача 4. Даны три точки A, B, C; прямая b является полярой точки B, точка K принадлежит поляре точки A, точка D принадлежит поляре треугольника ABC. Все полярные отношения рассматриваются относительно одной и той же некоторой коники.
Построить поляру точки A.

Решение:

Обозначим через l поляру треугольника ABC, а через a поляру точки A. Проведём прямую AC до пересечения с полярой b. Поглученную точку обозначим через M. Тогда $MD\equiv l$. Проведём BC до пересечения с полярой l. Обозначим полученную точку через N. В силу теоремы «о поляре треугольника» $N\in a$, но по условию задачи точка $K\in a$. Следовательно искомая поляра $a\equiv KN$ (Рис.5).

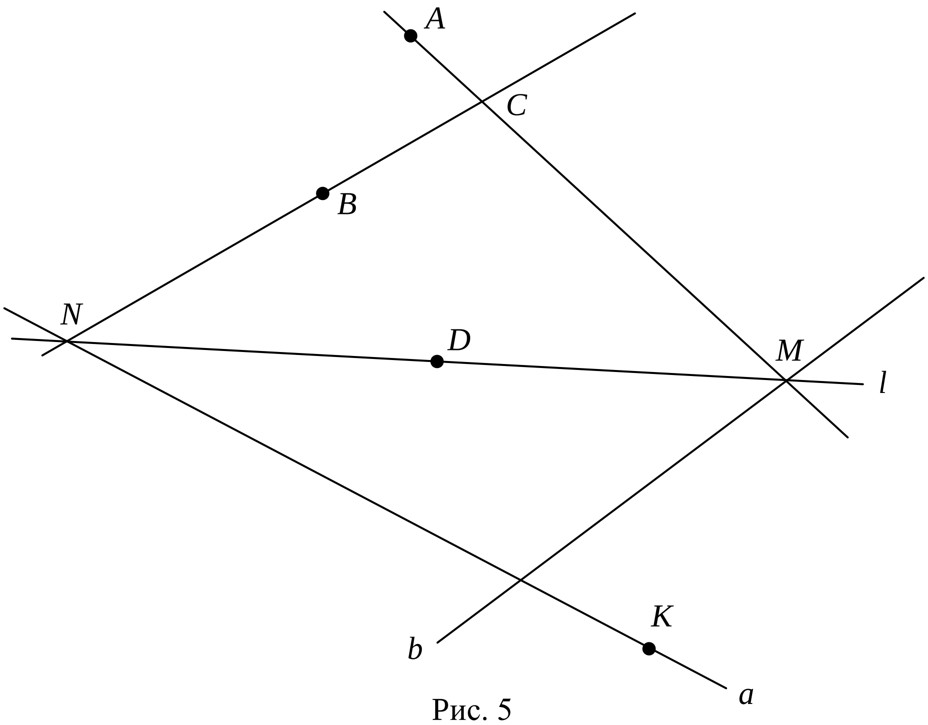

Рис. 5

Задача 5. Даны точки ***A***, ***B***, ***C***. Точка ***A*** принадлежит некоторой окружности. Дана также поляра точки ***C*** и поляра треугольника ***ABC*** относительно этой окружности (назовём такую окружность – окружностью поляры данного треугольника).
Построить окружность поляры треугольника ***ABC***.

Решение:

Обозначим поляру точки ***C*** и поляру треугольника ***ABC*** соответственно через *c* и ***l***.

В силу теоремы «о поляре треугольника» прямые ***AB***, ***c*** и ***l*** пересекаются в одной точке.

Покажем, что центр искомой окружности лежит на прямой, перпендикулярной прямой ***c*** и проходящей через точку ***C***.

Возможны три случая.

1. Пусть точка ***C*** лежит вне искомой окружности. Построим поляру точки ***C*** (Рис. 6).

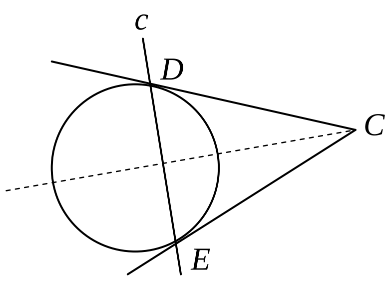

Рис. 6

DC и ***CE*** - касательные к оеружности, следовательно треугольник ***DCE*** - равнобедренный, следовательно перпендикуляр, проведённый через точку ***C*** к ***DE***, пройдёт через центр окружности.

2. Пусть точка ***C*** лежит на окружности (Рис. 7).

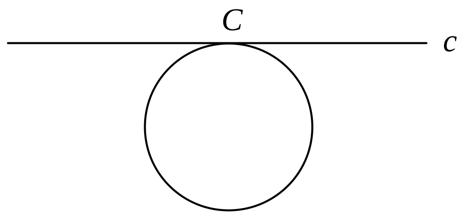

Рис. 7

Поляра точки ***C*** будет касательной к окружности в этой точке, т.е. перпендикуляр, восставленный в точке ***C*** к прямой c, пройдёт через центр окружности.

3. Пусть точка ***C*** лежит внутри окружности (Рис. 8).

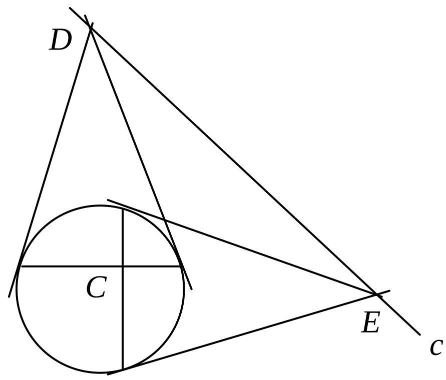

Рис. 8

Проведём через ***C*** две хорды одинаковой длины (это всегда можно сделать). На этих хордах, как на основаниях, построим равнобедренные треугольники, боковые стороны которых являются касательными к этой окружности. Тогда прямая, проходящая через вершины ***D*** и ***E*** полученных, будет полярой точки ***C***. Из Рис. 8 очевидно следует, что прямая, перпендикулярная ***DE*** и проходящая через точку ***C***, проходит через центр окружности.

Теперь вернёмся к нашей задаче. Мы имеем точку ***C*** и её поляру. Следовательно прямая, перпендикулярная ***c*** и проходящая через точку ***C***, бедет проходить через центр искомой окружности.

Построим прямую ***m***, перпендикулярную ***c*** и проходящую через точку ***C*** (Рис. 9).

AN - касательная к искомой окружности и точка ***A*** принадлежит этой окружности по условию.

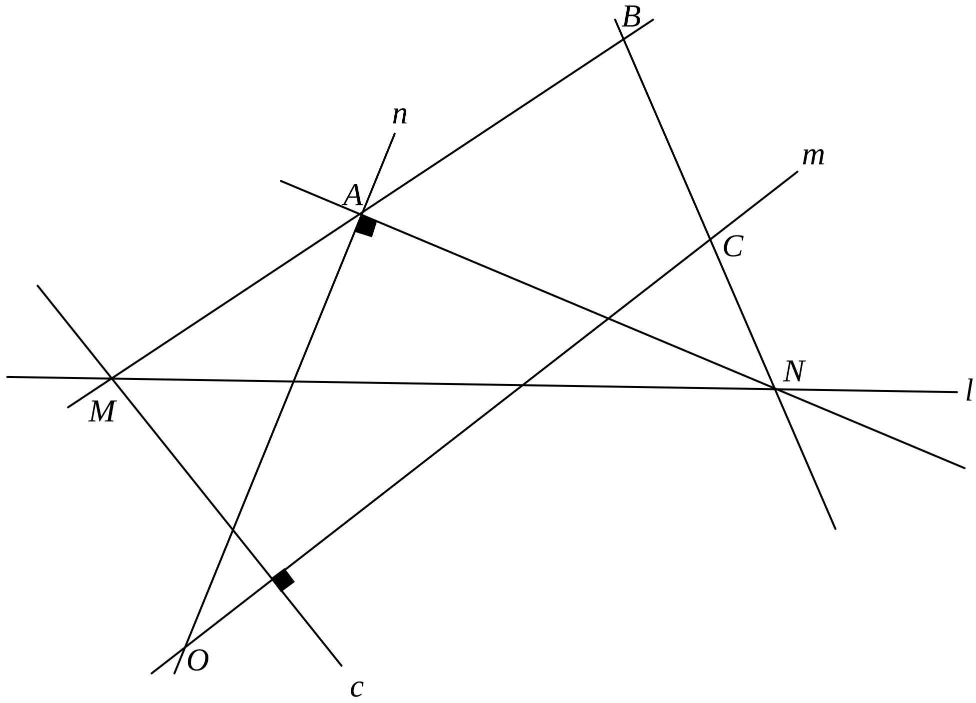

Рис. 9

Построим прямую $\boldsymbol{n}$, перпендикулярную $\boldsymbol{AN}$ и проходящую через точку $\boldsymbol{A}$, тогда центр искомой окружности - $\boldsymbol{O \equiv (n \cap m)}$.

Строим искомую окружность с центром в точке $\boldsymbol{O}$ и радиусом $\boldsymbol{OA}$.

Задача 6. Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ описан около данной окружности. Доказать, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания окружности и противоположной стороны, пересекаются в одной точке (частный случай теоремы Брианшона).

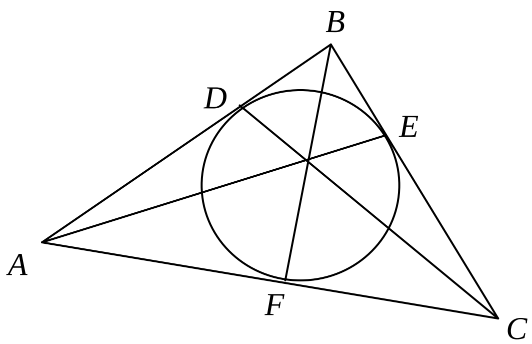

Рис. 10

Решение:

Точка $\boldsymbol{D}$ является полюсом поляры $\boldsymbol{AB}$, точка $\boldsymbol{E}$ - полюс $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{F}$ - полюс $\boldsymbol{AC}$. Тогда в силу двойственной теоремы «о проляре треугольника», прямые $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{AE}$ и $\boldsymbol{BE}$ будут пересекаться в одной точке.

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ вписан в окружность. Доказать, что касательные, проходящие через вершины треугольника, пересекаются со сторонами, противрположными данным вершинам, в точках, лежащих на одной прямой (частный случай теоремы Паскаля, Рис. 11).

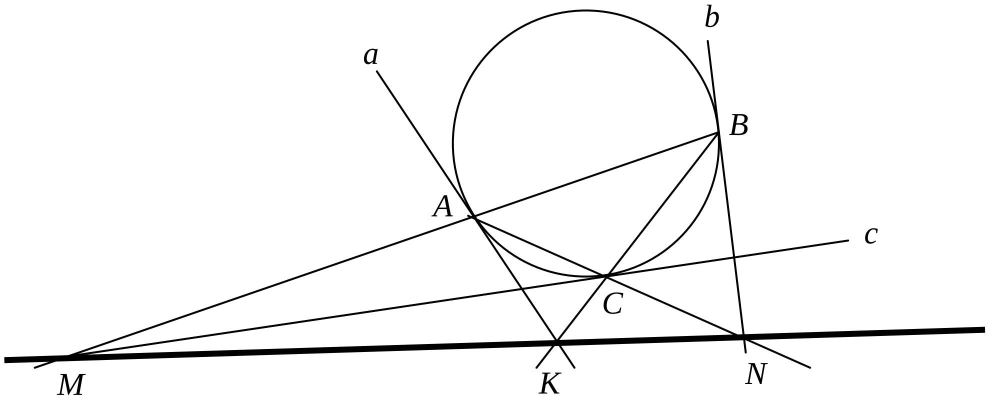

Рис. 11

Решение:

Прямая $\boldsymbol{a}$ является полярой вершины $\boldsymbol{A}$ данного треугольника. Прямые $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ являются полярами точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ соответственно. Тогда в силу теоремы «о поляре треугольника» точки $\boldsymbol{M \equiv (AB \cap c)}$, $\boldsymbol{K \equiv (BC \cap a)}$ и $\boldsymbol{N \equiv (AC \cap b)}$ будут лежать на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Задача 8: Дана окружность, вершины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и поляра $\boldsymbol{l}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$. Построить точку $\boldsymbol{C}$.

Решение:

Сделаем чертёж (Рис. 12).

Построим поляру точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{(a \cap l) \equiv K}$.

Построим поляру точки $\boldsymbol{B}$ -$\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{(b \cap l) \equiv M}$.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая $\boldsymbol{AC}$ должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$, а прямая $\boldsymbol{BC}$ должна проходить через точку $\boldsymbol{K}$.

Построим $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$, тогда $\boldsymbol{C \equiv (AM \cap BK)}$.

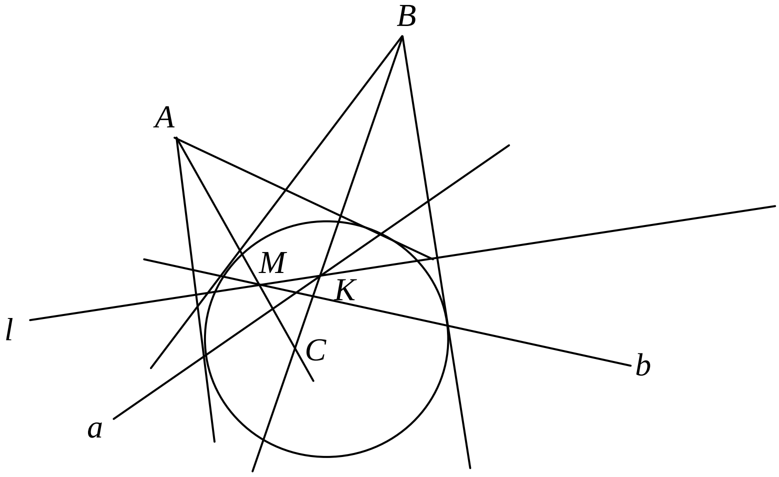

Рис. 12

Задача 9 (**Теорема о бесконечно удалённой поляре треугольника**):

Если центр окружности поляры треугольника $\boldsymbol{ABC}$ является ортоцентром данного треугольника, то его поляра будет бесконечно удалённой прямой.

Решение:

Обозначим поляру треугольника $\boldsymbol{ABC}$ через $\boldsymbol{l}$, а поляры вершин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно. Тогда $\boldsymbol{M \equiv (AB \cap c)}$, $\boldsymbol{K \equiv (BC \cap a)}$ и $\boldsymbol{N \equiv (AC \cap b)}$ где $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{N}$ принадлежат прямой $\boldsymbol{l}$.

Усли две из точек $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{N}$ будут бесконечно удалёнными, то и прямая $\boldsymbol{l}$ будет бесконечно удалённой прямой.

Пусть для определённости – это будут точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{K}$. Тогда $\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{BC} \parallel \boldsymbol{a}$ (Рис. 13).

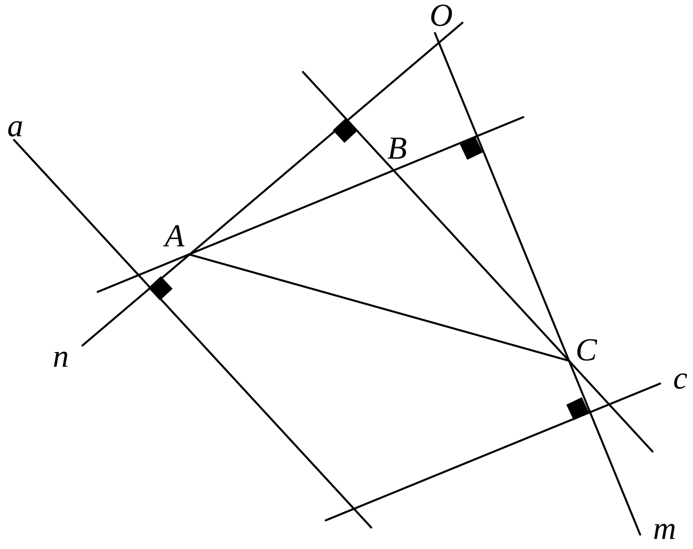

Рис. 13

Построим центр окружности поляры данного треугольника.

Для этого проведём прямую $\boldsymbol{m}$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{c}$ через точку $\boldsymbol{C}$, а прямую $\boldsymbol{n}$ - перпендикулярно прямой $\boldsymbol{a}$ через точку $\boldsymbol{A}$. Тогда искомый центр окружности - $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$. Но т.к. $\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{BC} \parallel \boldsymbol{a}$, то точка $\boldsymbol{O}$ будет одновременно и ортоцентром данного треугольника.

Что и требовалось доказать.

Задача 10: Дана окружность и две вершины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ невырожденного треугольника $\boldsymbol{ABC}$, не принадлежащие данной окружности. Известно, что одна из сторон треугольника $\boldsymbol{ABC}$ является его полярой относительно данной окружности.

Построить треугольник $\boldsymbol{ABC}$.

Решение:

Предположим, что сторона $\boldsymbol{AB}$ является полярой треугольника $\boldsymbol{ABC}$ - $\boldsymbol{l}$. Построим поляру точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$ (Рис. 14).

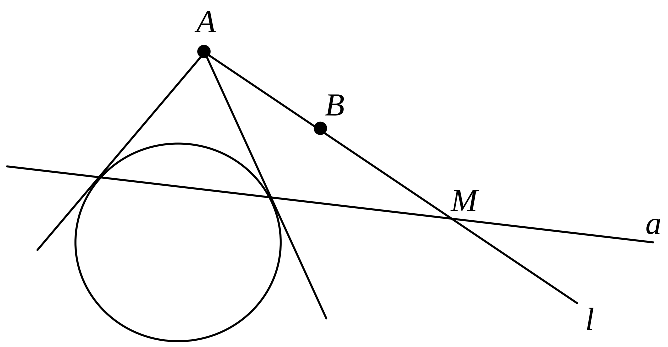

Рис. 14

$\boldsymbol{M \equiv (AB \cap a)}$, но прямая $\boldsymbol{BC}$ также должна пересекать прямую $\boldsymbol{l}$ в точке $\boldsymbol{M}$, и т.к. $\boldsymbol{B \in l}$, по нашему предположению, то и точка $\boldsymbol{C}$ должна принадлежать прямой $\boldsymbol{l}$. Следовательно треугольник $\boldsymbol{ABC}$ будет вырожденным, что противоречит условию задачи. Следовательно прямая $\boldsymbol{AB}$ не может являться полярой нашего треугольника.

Пусть прямая $\boldsymbol{AC}$ является полярой треугольника $\boldsymbol{ABC}$. Пусть поляра точки $\boldsymbol{A}$ пересекает прямую $\boldsymbol{BC}$ в некоторой точке $\boldsymbol{K}$. Следовательно точка $\boldsymbol{K}$ лежит на проляре треугольника $\boldsymbol{AC}$. Т.е. прямая AC проходит через точку $\boldsymbol{K}$ и прямая $\boldsymbol{BC}$ также проходит через точку $\boldsymbol{K}$. Отсюда заключаем, что $\boldsymbol{K \equiv C}$.

Т. о. получаем, что геометрическим местом для точек $\boldsymbol{C}$ будет поляра точки $\boldsymbol{A}$. Получаем бесконечное множество треугольников $\boldsymbol{ABC}$, у которых одна из сторон ($\boldsymbol{AC}$ или $\boldsymbol{BC}$) является полярой треугольника.

Задача 11 Дан треугольник $\boldsymbol{ABC}$ и его поляра, относительно некоторой окружности. Известно, что точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ принадлежат этой окружности.

Построить окружность поляры данного треугольника.

Решение:

Обозначим поляру треугольника $\boldsymbol{ABC}$ через $\boldsymbol{l}$.

Пусть $\boldsymbol{M \equiv (BC \cap l)}$, (Рис. 15).

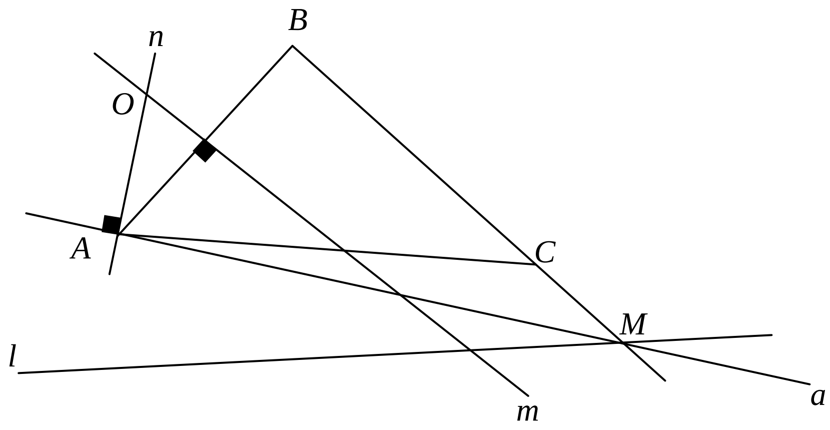

Рис. 15

Поляра точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$ также должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$. Но т.к. $\boldsymbol{A}$ принадлежит окружности, то $\boldsymbol{AM \equiv a}$.

Проведём прямую $\boldsymbol{n}$ через точку $\boldsymbol{A}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{a}$. Проведём прямую $\boldsymbol{m}$ перпендикулярно стороне $\boldsymbol{AB}$ и проходящую через середину отрезка $\boldsymbol{AB}$. Тогда точка $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$ будет центром искомой окружности. Искомая окружность строится радиусом $\boldsymbol{OA}$ из центра $\boldsymbol{O}$.

Задача 12 Дан треугольник $\boldsymbol{ABC}$, его поляра, относительно некоторой окружности и точка $\boldsymbol{D}$, принадлежащая поляре точки $\boldsymbol{A}$. Известно также, что точка $\boldsymbol{B}$ принадлежит окружности поляры данного треугольника.
Построить окружность поляры треугольника.

Решение:

Обозначим поляру треугольника $\boldsymbol{ABC}$ через $\boldsymbol{l}$.

Пусть точка $\boldsymbol{M \equiv (AC \cap l)}$. Поляра точки $\boldsymbol{B}$ также должна проходить через точку $\boldsymbol{M}$ и т.к. точка $\boldsymbol{B}$ лежит на искомой окружности по условию задачи, то $\boldsymbol{BM \equiv b}$ - является полярой точки $\boldsymbol{B}$ (Рис. 16).

Проведём прямую $\boldsymbol{n}$ через точку $\boldsymbol{B}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{BM}$.

Пусть $\boldsymbol{N \equiv (BC \cap l)}$.Следовательно точка $\boldsymbol{N}$ принадлежит поляре точки $\boldsymbol{A}$. Точка $\boldsymbol{D}$ также принадлежит поляре точки $\boldsymbol{A}$ по условию задачи, следовательно поляра точки $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a \equiv DN}$.

Проведём прямую m через точку $\boldsymbol{A}$ и перпендикулярно прямой $\boldsymbol{a}$. Тогда точка $\boldsymbol{O \equiv (m \cap n)}$ будет центром искомой окружности.

Строим окружность с центром в точке $\boldsymbol{O}$ и радиусом $\boldsymbol{OB}$.

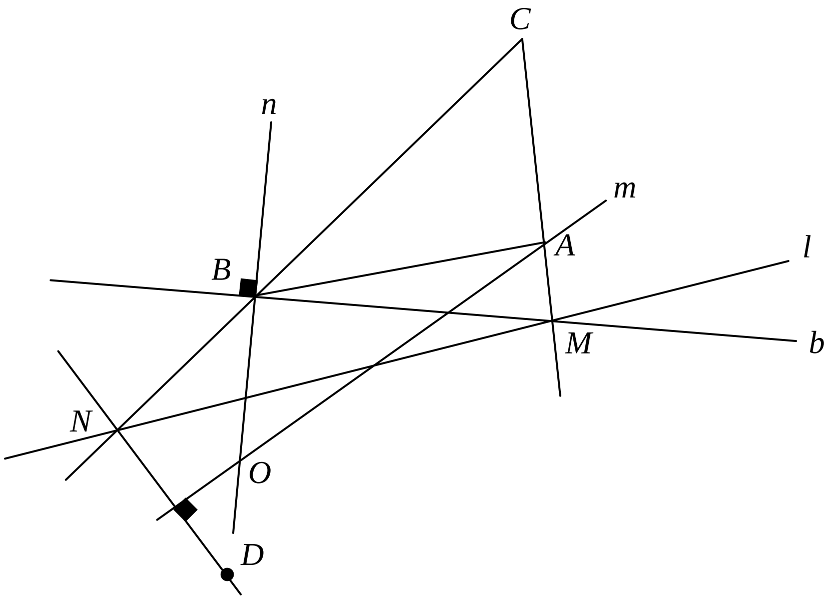

Рис. 16

Задача 13 Дан треугольник $\boldsymbol{ABC}$, поляра $\boldsymbol{b}$ точки $\boldsymbol{B}$ относительно некоторой окружности, точка $\boldsymbol{K}$ принадлежит поляре точки $\boldsymbol{A}$, точка $\boldsymbol{M}$ принадлежит поляре точки $\boldsymbol{C}$. Известно также, что центр окружности поляры треугольника лежит на прямой $\boldsymbol{CM}$.
Построить поляру точки $\boldsymbol{A}$.

Решение:

Построим точку $\boldsymbol{N \equiv (AC \cap b)}$. Т.к. центр окружности принадлежит прямой $\boldsymbol{CM}$ и $\boldsymbol{M}$ принадлежит поляре точки $\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{c}$ перпендикулярна $\boldsymbol{CM}$.

Пусть $\boldsymbol{D \equiv (AB \cap c)}$, следовательно $\boldsymbol{ND \equiv l}$ - поляра треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

Пусть $\boldsymbol{E \equiv (BC \cap l)}$, тогда $\boldsymbol{E \in a}$ и, т.к. $\boldsymbol{K \in a}$ по условию, то $\boldsymbol{EK}$ - поляра точки $\boldsymbol{A}$ (Рис. 17).

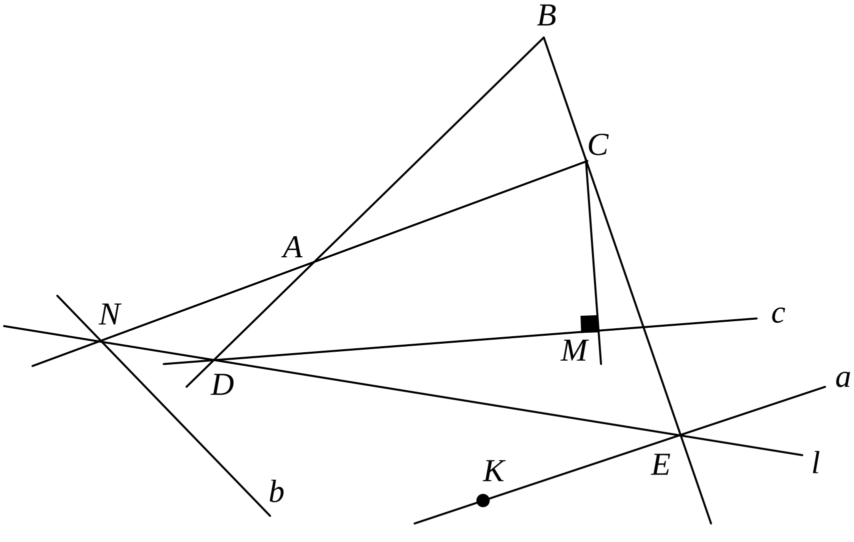

Рис. 17