Франц Герман

Теоремы проективно-аналитической геометрии

(franz.h-n@yandex.ru)

Теорема о перспективных треугольниках

Теорема: **Если два перспективных треугольника $A_1A_2A_3$ и $A_1^*A_2^*A_3^*$ соответственно, вписаны в произвольную конику G, то точки пересечения сторон A_iA_j (или сторон $A_i^*A_j^*$) и поляр вершин A_k^* (или вершин A_k) лежат на одной прямой l (или прямой l^*). Причём ось перспективы данных треугольников и прямые l и l^* пересекаются в одной точке.**

Прямую l будем называть псевдоосью перспективы.

Доказательство:

Выберем проективный репер $R=\{A_1, A_2, A_3, S\}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $S(1:1:1)$ Рис. 18.

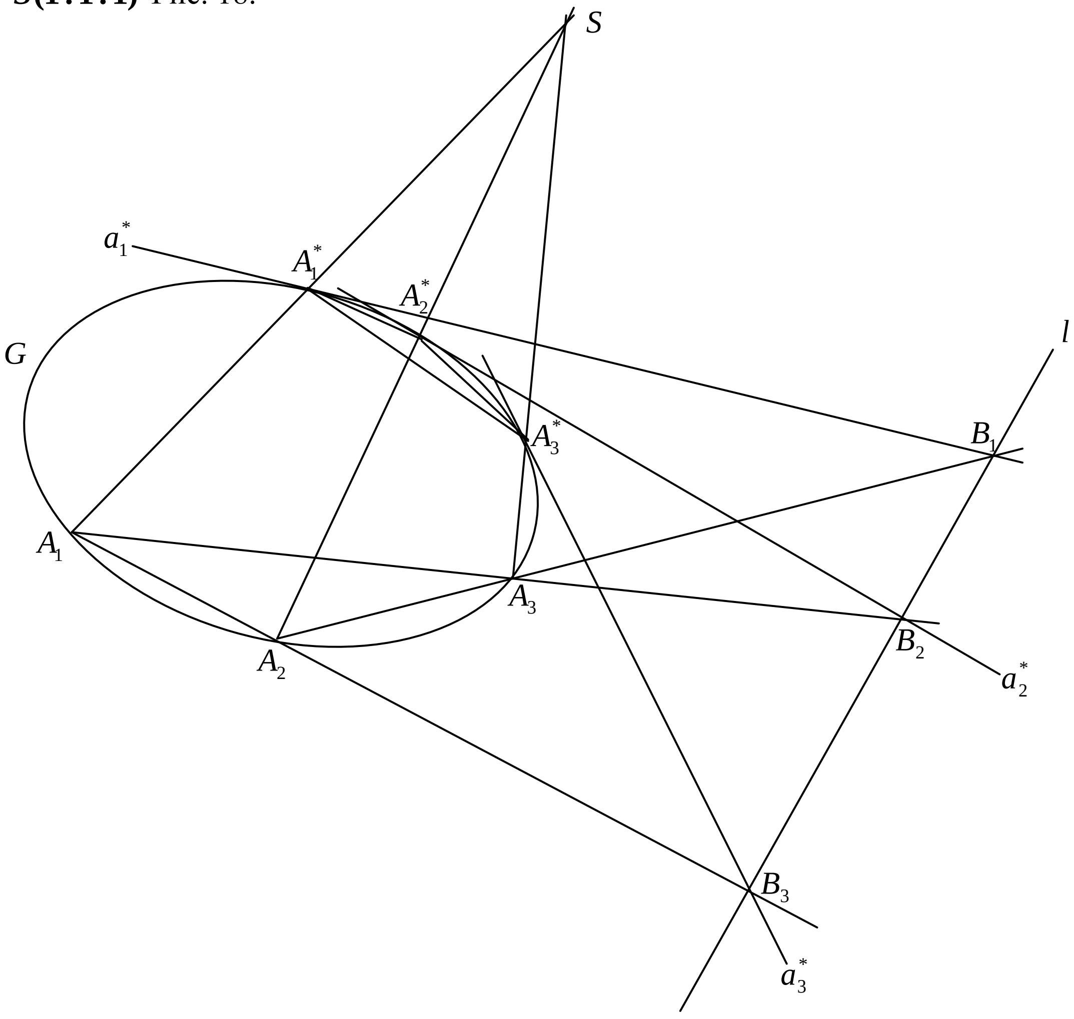

Рис. 1

Уравнение коники $\boldsymbol{G}$ в выбранном репере будет иметь вид:

$$\boldsymbol{G} \qquad g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0; \text{ здесь } g_{ij} = g_{ji}.$$

Найдём уравнения прямых SA_1, SA_2, SA_3.

$$SA_1: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_2 - x_3 = 0;$$

$$SA_2: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 - x_1 = 0;$$

$$SA_3: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 = 0;$$

Найдём координаты точек A_1^*, A_2^*, A_3^* в репере $\boldsymbol{R}$, т.е. $A_i^* \equiv (SA_i \cap G)$.

$$A_1^*: \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0; \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений. Подставим во второе уравнение вместо x_2 переменную x_3, получим:

$$g_{12}x_1x_3 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_3^2 = x_3(g_{12}x_1 + g_{13}x_1 + g_{23}x_3) = 0;$$

$$x_1(g_{12} + g_{13}) = -x_3g_{23}, \text{ или } x_1 = -\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}}x_3;$$

$$A_1^*\left(-\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}} : 1 : 1\right);$$

Аналогично находим координаты точек A_2^* и A_3^*.

$$A_2^*\left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{12} + g_{23}} : 1\right); \qquad A_3^*\left(1 : 1 : -\frac{g_{12}}{g_{13} + g_{23}}\right).$$

Обозначим поляры точек A_i^* через a_i^* соответственно и найдём их уравнения в репере $\boldsymbol{R}$.

$$a_1^*: \quad g_{12}\left(x_1 + x_2\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\right)\right) + g_{13}\left(x_1 + x_3\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\right)\right) + g_{23}\left(x_2 + x_3\right) = 0;$$

$$x_1\left(g_{12}^2 + 2g_{12}g_{13} + g_{13}^2\right) + x_2\left(g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} - g_{12}g_{23}\right) + x_3\left(g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} - g_{13}g_{23}\right) =$$

$$= x_1\left(g_{12} + g_{13}\right)^2 + x_2 g_{13}g_{23} + x_3 g_{12}g_{23} = 0.$$

Аналогично находим уравнения поляр a_2^* и a_3^*.

$$a_2^*: \quad x_1 g_{13}g_{23} + x_2(g_{12} + g_{23})^2 + x_3 g_{13}g_{12} = 0.$$

$$a_3^*: \quad x_1 g_{12}g_{23} + x_2 g_{12}g_{13} + x_3(g_{13} + g_{23})^2 = 0.$$

Теперь вычислим координаты точек $B_i = (a_i^* \cap A_j A_k)$.

Сторона A_2A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ имеет уравнение $x_1 = 0$. Тогда координаты точки B_1 найдём из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1(g_{12} + g_{13})^2 + x_2 g_{13}g_{23} + x_3 g_{12}g_{23} = 0; \end{cases}$$

$$B_1 \left(0 : g_{12} : -g_{13}\right);$$

Аналогично находим и координаты точек B_2 и B_3:

$$B_2 \left(g_{12} : 0 : -g_{23}\right); \quad B_3 \left(-g_{13} : g_{23} : 0\right).$$

Вычислим определитель, составленный из координат точек B_i:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{12} & -g_{13} \\ g_{12} & 0 & -g_{23} \\ -g_{13} & g_{23} & 0 \end{vmatrix} = g_{12}g_{13}g_{23} - g_{12}g_{13}g_{23} = 0.$$

Т.к. наш определитель равен нулю, то следовательно точки B_i лежат на одной прямой $\boldsymbol{l}$.

Покажем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$.

$$l:\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & g_{12} & -g_{13} \\ g_{12} & 0 & -g_{23} \end{vmatrix} = -x_1 g_{12} g_{23} - x_2 g_{12} g_{13} - x_3 g_{12}^2 = -g_{12}(x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12}) = 0;$$

$$l:\qquad x_1 g_{23} + x_2 g_{31} + x_3 g_{12} = 0; \tag{1}$$

или в свёрнутой записи: $x_{[i} g_{jk]} = 0$;

Очевидно, что определив проективный репер при помощи соответствующих точек треугольника $A_1^* A_2^* A_3^*$, т.е $R^* = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*, S\}$, аналогично доказывается справедливость теоремы и для прямой l^*.

Теперь приступим к доказательству второй части нашей теоремы.

Покажем уравнение прямой l^* для репера R. Для этого необходимо определить точки пересечения например прямых $A_1^* A_2^*$ и $A_1^* A_3^*$ с полярами точек A_3 и A_2 соответственно и найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Найдём уравнение прямой $A_1^* A_2^*$:

$$A_1^* A_2^*:\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -\dfrac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1\left(1 + \frac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}}\right) + x_2\left(\frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} + 1\right) + x_3\left(\frac{g_{23} g_{13}}{(g_{12}+g_{23})(g_{12}+g_{13})} - 1\right) = 0$$

Или окончательно:

$$A_1^* A_2^*:\qquad x_1(g_{12}+g_{13}) + x_2(g_{12}+g_{23}) - x_3 g_{12} = 0;$$

Уравнение поляры точки A_3 имеет вид:

$$g_{12}(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) + g_{13}(x_1 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) + g_{23}(x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1) = g_{13} x_1 + g_{23} x_2 = 0.$$

Теперь можем найти координаты точки пересечения этой поляры и прямой $A_1^* A_2^*$. Обозначим эту точку через B_3^*.

$$B_3^*:\quad \begin{cases} x_1(g_{12}+g_{13}) + x_2(g_{12}+g_{23}) - x_3 g_{12} = 0 \\ x_1 g_{13} + x_2 g_{23} = 0 \end{cases}.$$

Решая полученную систему уравнений находим:

$$B_3^*\left(1:-\frac{g_{13}}{g_{23}}:-\frac{g_{13}-g_{23}}{g_{23}}\right).$$

Аналогично находим и координаты точки $B_2^* \equiv (a_2 \cap A_1^* A_3^*)$:

$$B_2^*\left(-\frac{g_{23}}{g_{12}}:-\frac{g_{23}-g_{12}}{g_{12}}:1\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки B_3^* и B_2^* будет иметь вид:

$$x_1(g_{12}+g_{13}-g_{23})+x_2(g_{12}+g_{23}-g_{13})+x_3(g_{13}+g_{23}-g_{12})=0 \qquad (2)$$

Теперь найдём уравнение оси перспективы для треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$. В нашем случае осью перспективы будет являться поляра точки S. Её уравнение для репера R имеет вид:

$$x_1(g_{12}+g_{13})+x_2(g_{12}+g_{23})+x_3(g_{13}+g_{23})=0 \qquad (3)$$

Заметим, что коэффициенты при x_i уравнения (3) получаются как разность соответствующих коэффициентов уравнения (2) и уравнения (1). Т.е. определитель, составленный из коэффициентов при x_i в уравнениях (1), (2) и (3) будет равен равен нулю. Следовательно прямые l, l^* и поляра точки S пересекаются в одной точке. Назовём её точкой L.

Наша теорема доказана.

Интересно рассмотреть частный случай, когда прямые l и l^* совпадают.

В этом случае коэффициенты при x_i в уравнениях этих прямых должны быть пропорциональны, т.е. мы имеем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{12}+g_{13}-g_{23}=k\cdot g_{23} \\ g_{12}+g_{23}-g_{13}=k\cdot g_{13} \\ g_{13}+g_{23}-g_{12}=k\cdot g_{12} \end{cases};$$

Сложим левые и правые части этих уравнений, получим:

$$g_{12}+g_{13}+g_{23}=k(g_{12}+g_{13}+g_{23}); \qquad \text{т. е. } k=1.$$

Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} = 2g_{23} \\ g_{12} + g_{23} = 2g_{13} \\ g_{13} + g_{23} = 2g_{12} \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$g_{13} - g_{23} = 2(g_{23} - g_{13}).$$

Это выражение будет справедливо только в том случае, если $g_{13} = g_{23}$. Но тогда получаем, что $g_{13} = g_{23} = g_{12}$. Таким образом, уравнение коники G будет иметь вид:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0,$$

а уравнения (1), (2) и (3)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Сделаем следующие преобразования координат: $X = \dfrac{x_1}{x_3}$, $Y = \dfrac{x_2}{x_3}$.

Рассмотрим наш случай в декартовой координатной системе XOY.

Уравнение коники G в новой координатной системе примет такой вид:

$$XY + X + Y = 0 \text{ или } Y = -\frac{X}{1+X}, \tag{4}$$

а прямые (1), (2) и (3) (мы помним, что все три прямые совпадают, а следовательно описываются одним уравнением) имеют уравнение:

$$Y = -X - 1, \tag{5}$$

Покажем, как выглядит наш случай на чертеже (Рис. 19).

Мы видим, что коника G представляет собой ни что иное, как равностороннюю гиперболу, смещённую относительно начала координат на вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и повернутую на $45°$. Ветви гиперболы будут симметричны относительно прямой $Y = X$, т.к. уравнение (4) можно записать и таким образом:

$$X = -\frac{Y}{1+Y}.$$

Уравнения асимптот будут иметь вид: $X = -1$; $Y = -1$. На Рис. 19 асимптоты показаны светлозелёным цветом, а прямая (5) – розовым.

Вершины треугольника $A_1^* A_2^* A_3^*$ (он показан синим) будут иметь координаты:

$$A_1^*\left(-\frac{1}{2};1\right),\ A_2^*\left(1;-\frac{1}{2}\right),\ A_3^*(-2;-2).$$

А координаты вершин треугольника $A_1 A_2 A_3$ (в данной системе координат он является вырожденным) соответственно будут:

$$A_1(-\infty;-1),\ A_2(-1;-\infty),\ A_3(0;0).$$

Точка S имеет координаты (1;1).

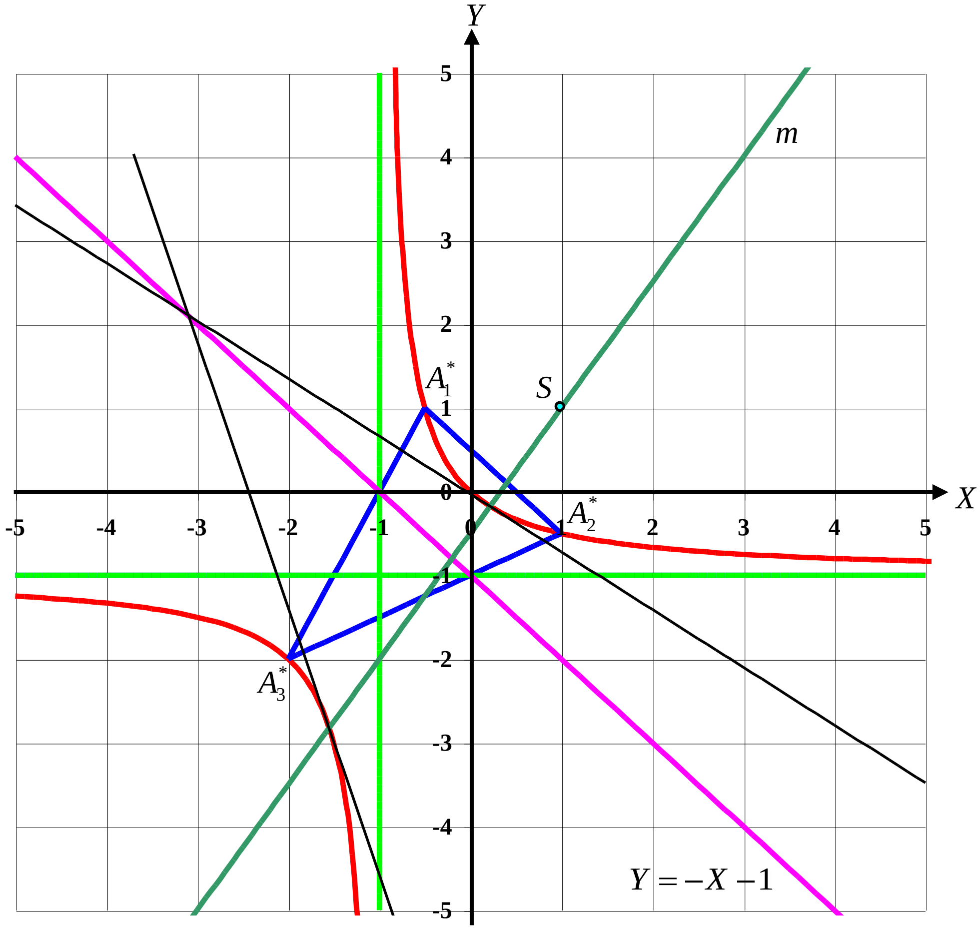

Рис. 2

Такая гипербола интересна тем, что касательные, проведённые в точках пересечения ветвей гиперболы G и прямой m, проходящей через точку S, всегда будут пересекаться на прямой (5) (пример таких касательных на Рис. 2 показан чёрным цветом).

Справедлива также двойственная

Теорема: **Если два перспективных треугольника $A_1 A_2 A_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$ соответственно, вписаны в произвольную конику G, то прямые,**

проходящие через вершины A_i^* (или вершияы A_i) и полюсы сторон $A_k A_j$ (или полюсы сторон $A_k^* A_j^*$) пересекаются в одной точке T (или точке T^*). Причём центр перспективы S данных треугольников и точки T и T^* лежат на одной прямой.

Точку T будем называть псевдоцентром перспективы.

Доказательство:

Выберем проективный репер R={ A_1, A_2, A_3, S }, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $S(1:1:1)$ Рис. 3.

Обозначим через a_i поляры точек A_i , а точки пересечения данных поляр соответственно через $P_i \equiv (a_j \cap a_k)$.

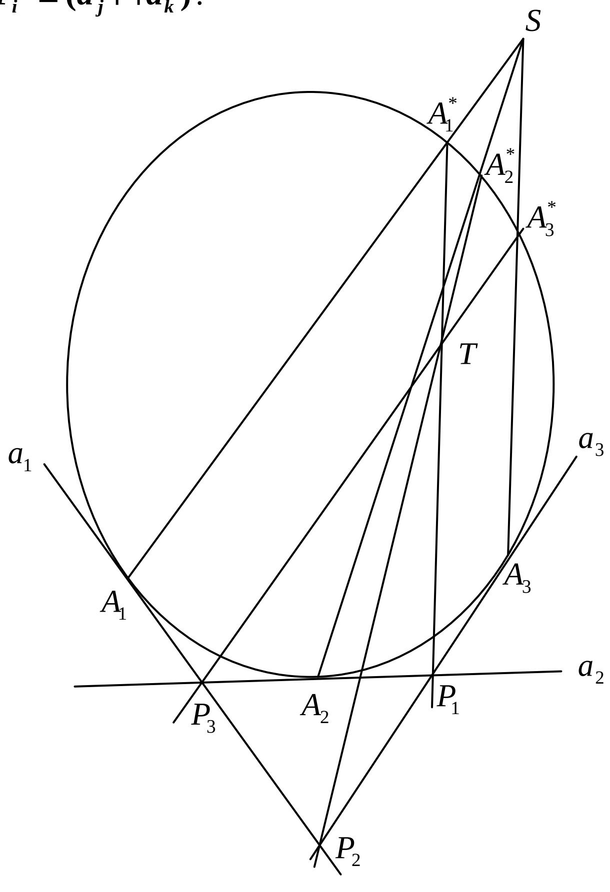

Рис. 3

Таким образом точки P_i являются полюсами прямых $A_j A_k$.

Докажем, что прямые $P_i A_i$ пересекаются в точке T.

Рассмотрим треугольники $P_1 P_2 P_3$ и $A_1^* A_2^* A_3^*$. Как было доказано ранее точки $B_i \equiv (P_j P_k \cap A_j A_k)$ лежат на одной прямой l^*. Следовательно прямая l^* является осью перспективы этих треугольников. А по теореме Дезарга для этих треугольников должен быть и центр перспективы, т.е. прямые $P_i A_i$ должны пересекаться в одной точке, точке T.

Аналогично доказывается, что и прямые $P_i^* A_i^*$, пересекаются в одной точке, точке T^*, где P_i^* - полюсы прямых $A_j^* A_k^*$.

Что и требовалось доказать

Теперь докажем, что точки T, T^* и S лежат на одной прямой t.

Уравнения поляр a_i в нашем репере будут иметь вид:

$$a_i: \quad g_{ij} x_j + g_{ik} x_k = 0.$$

Найдём координаты точки P_1 из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} x_1 + g_{23} x_3 = 0 \\ g_{13} x_1 + g_{23} x_2 = 0 \end{cases}$$

Мы имеем здесь два уравнения с тремя неизвестными, поэтому, не нарушая общности, можем положить $x_1 = 1$. Получаем такие координаты точки P_1 :

$$P_1 \left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{23}} : -\frac{g_{12}}{g_{23}} \right).$$

Аналогично находим и координаты точки P_2 :

$$P_2 \left(-\frac{g_{23}}{g_{13}} : 1 : -\frac{g_{12}}{g_{13}} \right).$$

Координаты точек A_1^* и A_2^* были вычислены ранее и соответственно равны:

$$A_1^* \left(-\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}} : 1 : 1 \right); \qquad A_2^* \left(1 : -\frac{g_{13}}{g_{12} + g_{23}} : 1 \right).$$

Можем найти уравнения прямых $A_1^* P_1$ и $A_2^* P_2$.

$$A_1^* P_1 : \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -\frac{g_{13}}{g_{23}} & -\frac{g_{12}}{g_{23}} \\ -\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}} & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 (g_{12}^2 - g_{13}^2) - x_2 g_{13} g_{23} + x_3 g_{12} g_{23} = 0 . \quad (6)$$

Аналогично:

$$A_2^* P_2 : \qquad x_1 g_{13} g_{23} - x_2 (g_{12}^2 - g_{23}^2) - x_3 g_{12} g_{13} = 0 . \qquad (7)$$

Рассмотрим уравнение (1) прямой $\boldsymbol{l}$.

$$\boldsymbol{l}: \qquad x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12} = 0;$$

Определим координаты полюса для данной прямой. Обозначим координаты искомого полюса через $(t_1 : t_2 : t_3)$. Искомые координаты находим из решения системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ij} \cdot t_i = \lambda \cdot l_j , \qquad j = \{1, 2, 3\},$$

где l_j - коэффициенты при x_j в уравнении (1). Т. е. получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{11}t_1 + g_{12}t_2 + g_{13}t_3 = \lambda \cdot g_{23} \\ g_{21}t_1 + g_{22}t_2 + g_{23}t_3 = \lambda \cdot g_{13} \\ g_{31}t_1 + g_{32}t_2 + g_{33}t_3 = \lambda \cdot g_{12} \end{cases}.$$

Мы помним, что для нашей коники в выбранном репере $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$ и $g_{ij} = g_{ji}$. С учётом этого, решая полученную систему уравнений, находим искомые координаты полюса прямой (1):

$$\left(\frac{g_{12}^2 + g_{13}^2 - g_{23}^2}{g_{12}g_{13}} : \frac{g_{23}^2 + g_{12}^2 - g_{13}^2}{g_{12}g_{23}} : \frac{g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{12}^2}{g_{13}g_{23}} \right)$$

Не трудно убедиться прямым вычислением, что полученные координаты удовлетворяют прямым $A_1^* P_1$ и $A_2^* P_2$. А это означает, что точка $\boldsymbol{T}$ является полюсом прямой $\boldsymbol{l}$.

Аналогично доказывается, что и точка T^* является полюсом прямой l^*, а в силу принципа взаимности поляр и полюсов точки $\boldsymbol{T}$, T^* и $\boldsymbol{S}$ будут лежать на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Теорема о двух центрах перспективы

Теорема: **Если треугольник $A_1 A_2 A_3$ вписан в произвольную конику G, и точки A_{ix} и A_{iy} являются проекциями вершины A_i на эту же конику, относительно двух проихвольных точек X и Y соответственно, то точки пересечения прямых $A_{ix}A_{iy}$ и $A_j A_k$, коллинеарны.**

Доказательство:

Выберем проективный репер $\boldsymbol{R}=\{ A_1 , A_2 , A_3 , X \}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $X(1:1:1)$ Рис. 1.

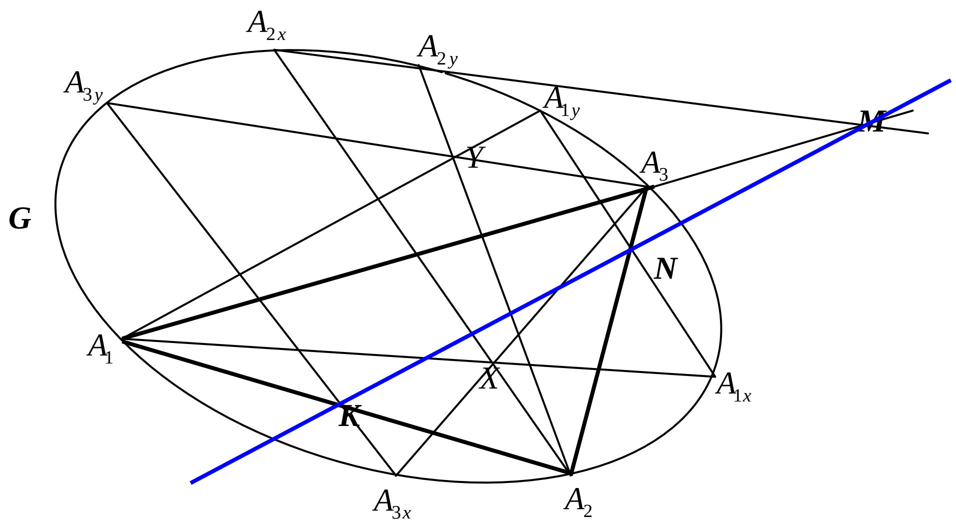

Рис. 1

Уравнение коники G в данном репере будет иметь вид:

$$G: \qquad g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Нам необходимо вычислить координаты точек A_{ix} и A_{iy}. Найдём уравнения прямых $A_i X$.

Для прямой $A_1 X$ будем иметь: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_3 - x_2 = 0$.

Тогда координаты точки $A_{1x} \equiv (A_1 X \cap G)$ находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0 \end{cases}$$

Подставим x_2 во второе уравнение вместо x_3, получим:

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_2 + g_{23}x_2^2 = 0; \qquad x_1(g_{12} + g_{13}) + g_{23}x_2 = 0.$$

Откуда находим координаты точки A_{1x}: $x_2 = 1;\ \ x_3 = 1;\ \ x_1 = -\dfrac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}}$,

или $$A_{1x}\left(-\frac{g_{23}}{g_{12} + g_{13}} : 1 : 1\right)$$

Аналогично находим координаты точек A_{2x} и A_{3x} :

$$A_{2x}\left(1:-\frac{g_{13}}{g_{12}+g_{23}}:1\right) \qquad A_{3x}\left(1:1:-\frac{g_{12}}{g_{13}+g_{23}}\right)$$

По условию теоремы точка Y является произвольной, поэтому мы возьмём её координаты в виде произвольных чисел: $Y:(1:a:b)$

Вычислим с учётом этого координаты точек A_{iy}.

Найдём уравнение прямой A_1Y .

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = a\cdot x_3 - b\cdot x_2 = 0$$

Координаты точки $A_{1y} \equiv (A_1Y \cap G)$ находим из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot x_3 - b\cdot x_2 = 0 \\ g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$x_3 = \frac{b\cdot x_2}{a}$. Подставим x_3 во второе уравнение нашей системы, получим:

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}\frac{b}{a}x_1x_2 + g_{23}\frac{b}{a}x_2^2 = 0; \quad x_1\left(g_{12}+\frac{b}{a}g_{13}\right) + x_2\frac{b}{a}g_{23} = 0.$$

Не нарушая общности возьмём $x_2 = 1$.

Откуда находим: $$A_{1y}\left(-\frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}:1:\frac{b}{a}\right)$$

Аналогично находим координаты и двух других точек:

$$A_{2y}\left(\frac{1}{b}:-\frac{g_{13}}{g_{12}+b\cdot g_{23}}:1\right); \quad A_{3y}\left(1:a:-\frac{a\cdot g_{12}}{g_{13}+a\cdot g_{23}}\right).$$

Введём обозначения (Рис. 1):

$$K \equiv (A_1A_2 \cap A_{3x}A_{3y}),\ N \equiv (A_2A_3 \cap A_{1x}A_{1y}),\ M \equiv (A_1A_3 \cap A_{2x}A_{2y}).$$

Для доказательства теоремы нам необходимо показать, что точки K, N и M коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой. Вычислим координаты этих точек, но для этого предварительно найдём уравнения прямых $A_{ix}A_{iy}$ и A_jA_k.

$$A_{1x}A_{1y}: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -\dfrac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}} & 1 & 1 \\ -\dfrac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}} & 1 & \dfrac{b}{a} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot x_1 - \frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}\cdot x_2 - \frac{g_{23}}{g_{12}+g_{13}}\cdot x_3 + \frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13}}\cdot x_3 - x_1 + \frac{b\cdot g_{23}}{a\cdot (g_{12}+g_{13})}\cdot x_2 =$$

$$= \left(\frac{b}{a}-1\right)\cdot x_1 + \frac{b\cdot g_{23}g_{13}(b-a)}{a\cdot (g_{12}+g_{13})\cdot (a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_2 + \frac{g_{23}g_{12}(b-a)}{(g_{12}+g_{13})\cdot (a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_3 = 0$$

В силу, выбранного нами, проективного репера уравнение прямой A_2A_3 будет иметь вид: $x_1 = 0$. Решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{b}{a}-1\right)\cdot x_1 + \dfrac{b\cdot g_{23}g_{13}(b-a)}{a\cdot (g_{12}+g_{13})\cdot (a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_2 + \dfrac{g_{23}g_{12}(b-a)}{(g_{12}+g_{13})\cdot (a\cdot g_{12}+b\cdot g_{13})}\cdot x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

находим координаты точки N.

$$N(0 : a\cdot g_{12} : -b\cdot g_{13})$$

Аналогично вычисляются и координаты других двух точек:

$$K(-g_{13} : a\cdot g_{23} : 0),\quad M(-g_{12} : 0 : b\cdot g_{23}).$$

Чтобы убедиться, что точки K, N и M лежат на одной прямой, вычислим определитель, составленный из координат данных точек.

$$\begin{vmatrix} -g_{13} & a\cdot g_{23} & 0 \\ 0 & a\cdot g_{12} & -b\cdot g_{13} \\ -g_{12} & 0 & b\cdot g_{23} \end{vmatrix} = -a\cdot b\cdot g_{13}g_{12}g_{23} + a\cdot b\cdot g_{12}g_{23}g_{13} = 0$$

Мы убедились, что полученный определитель равен нулю, следовательно, точки K, N и M лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

Рассмотрим **частный случай:**

если одна из точек перспективы, например Y, принадлежит конике G, то вторая точка перспективы - X будет принадлежать прямой KM.

Доказательство:

Подставим $x_1 = 1$ и $x_3 = b$ в уравнение нашей коники, получим значение второй координаты точки ***Y***.

$$g_{12}x_2 + g_{13}b + g_{23}bx_2 = 0; \quad \text{откуда:} \qquad x_2 = a = -\frac{bg_{13}}{g_{12} + g_{23}b}$$

Теперь найдём уравнение прямой ***KM***.

$$KM: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -g_{13} & -\frac{bg_{13}g_{23}}{g_{12}+bg_{23}} & 0 \\ -g_{12} & 0 & bg_{23} \end{vmatrix} = -\frac{b^2g_{13}g_{23}^2}{g_{12}+bg_{23}}x_1 - \frac{bg_{12}g_{13}g_{23}}{g_{12}+bg_{23}}x_3 + bg_{13}g_{23}x_2 = 0$$

или

$$bg_{23}x_1 - (g_{12} + bg_{23})x_2 + g_{12}x_3 = 0$$

Мы помним что точка ***X*** имеет координаты: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Подставив эти значения в уравнение прямой ***KM***, не трудно убедиться, что точка ***X*** ей принадлежит.

Что и требовалось доказать.

Следствие (***теорема Паскаля***).

Если шестиугольник вписан в произвольную конику, то точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

Доказательство:

Для удобства и наглядности введём следующие обозначения для вершин нашего шестиугольника: $YA_{1x}A_1A_2A_3A_{3x}$ (Рис. 2).

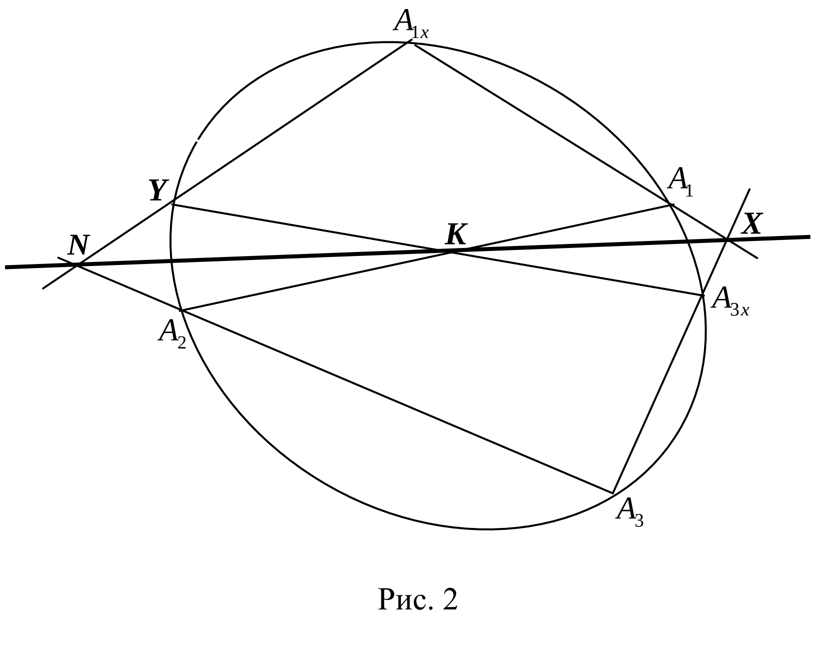

Рис. 2

Введём обозначения для точек пересечения противоположных сторон данного шестиугольника:

$$N \equiv (YA_{1x} \cap A_2 A_3)\,; \quad K \equiv (YA_{3x} \cap A_2 A_1)\,; \quad X \equiv (A_1 A_{1x} \cap A_{3x} A_3)\,.$$

Рассматривая конфигурацию на Рис. 2 с точки зрения частного случая нашей теоремы, становится очевидным, что точки N, K и X лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Справедлива также двойственная

Теорема: **Если треугольник $A_1 A_2 A_3$ вписан в произвольную конику G, и точки A_{ix} и A_{iy} являются проекциями вершины A_i на эту же конику, относительно двух проихвольных точек X и Y соответственно, то прямые, проходящие через точки $B_k \equiv (A_{ix} A_{iy} \cap A_{jx} A_{jy})$ и вершины треугольника A_k конкурентны.**

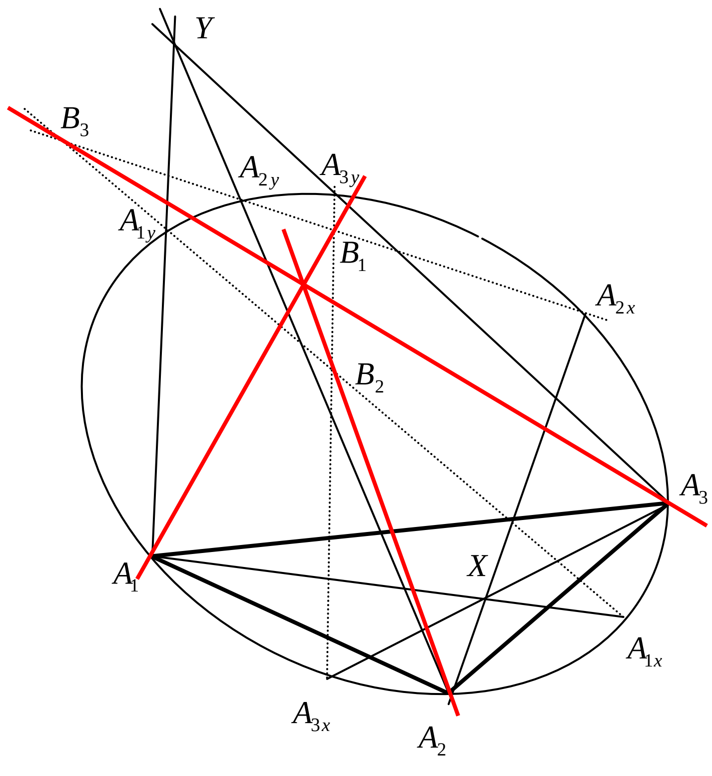

Рис. 3

Всё вышеизложенное позволяет сформулировать обобщённую теорему «***о двух центрах перспективы***»:

Теорема: **Если треугольник $A_1 A_2 A_3$ вписан в произвольную конику G, и точки A_{ix} и A_{iy} являются проекциями вершины A_i на эту же конику, относительно двух проихвольных точек X и Y соответственно, то**

точки $B_k \equiv (A_{ix} A_{iy} \cap A_{jx} A_{jy})$ образуют треугольник, перспективный данному.

Т. е. для треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$ имеем такое соответствие сторон:

$$A_1 A_2 \Leftrightarrow A_{3x} A_{3y}; \quad A_1 A_3 \Leftrightarrow A_{2x} A_{2y}; \quad A_2 A_3 \Leftrightarrow A_{1x} A_{1y}.$$

Покажем простейшие конфигурации для прямой и обратной теоремы.

Простейшая конфигурация прямой теоремы

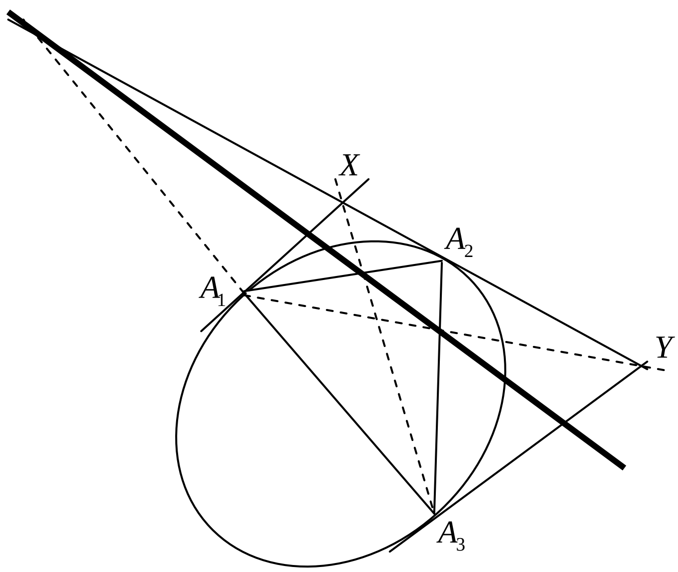

Рис. 4

Простейшая конфигурация обратной теоремы

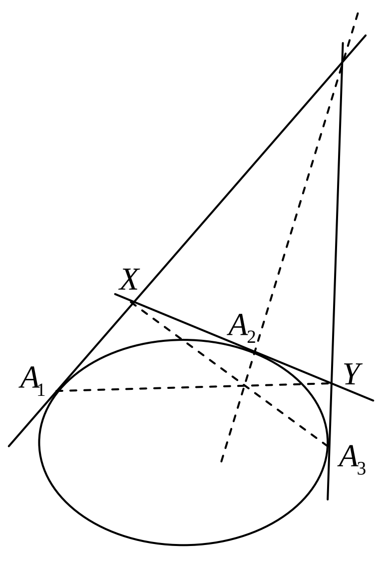

Рис. 5

Теорема о прямых Дезарга

Рассмотрим два 3-пучка прямых: $(a_i) = (a_1; a_2; a_3)$ и $(b_j) = (b_1; b_2; b_3)$ (Рис. 1). Обозначим точки пересечения данных пучков через $C_{ij} \equiv a_i \cap b_j$

Мы будем называть треугольник вписанным в пересечение двух пучков (a_i) и (b_j), если его вершинами являются точки C_{ij}, но ни одна из сторон не принадлежит прямым a_i и b_j.

Например, треугольники $C_{11}C_{22}C_{33}$ и $C_{31}C_{12}C_{23}$ (Рис. 1) являются вписанными в пересечение данных пучков.

Справедлива следующая

Теорема: **Прямые Дезарга любой пары треугольников, вписанных в пересечение двух пучков и не имеющих общих вершин, пересекаются в одной и той же точке S. Причём:**

1. **если T - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $C_{11}C_{31}C_{33}C_{13}$, то точки T, S и C_{22} лежат на одной прямой s**
2. **если точка $Z \equiv s \cap AB$, то сложное отношение четырёх точек $(ZS, TC_{22}) = -2$**

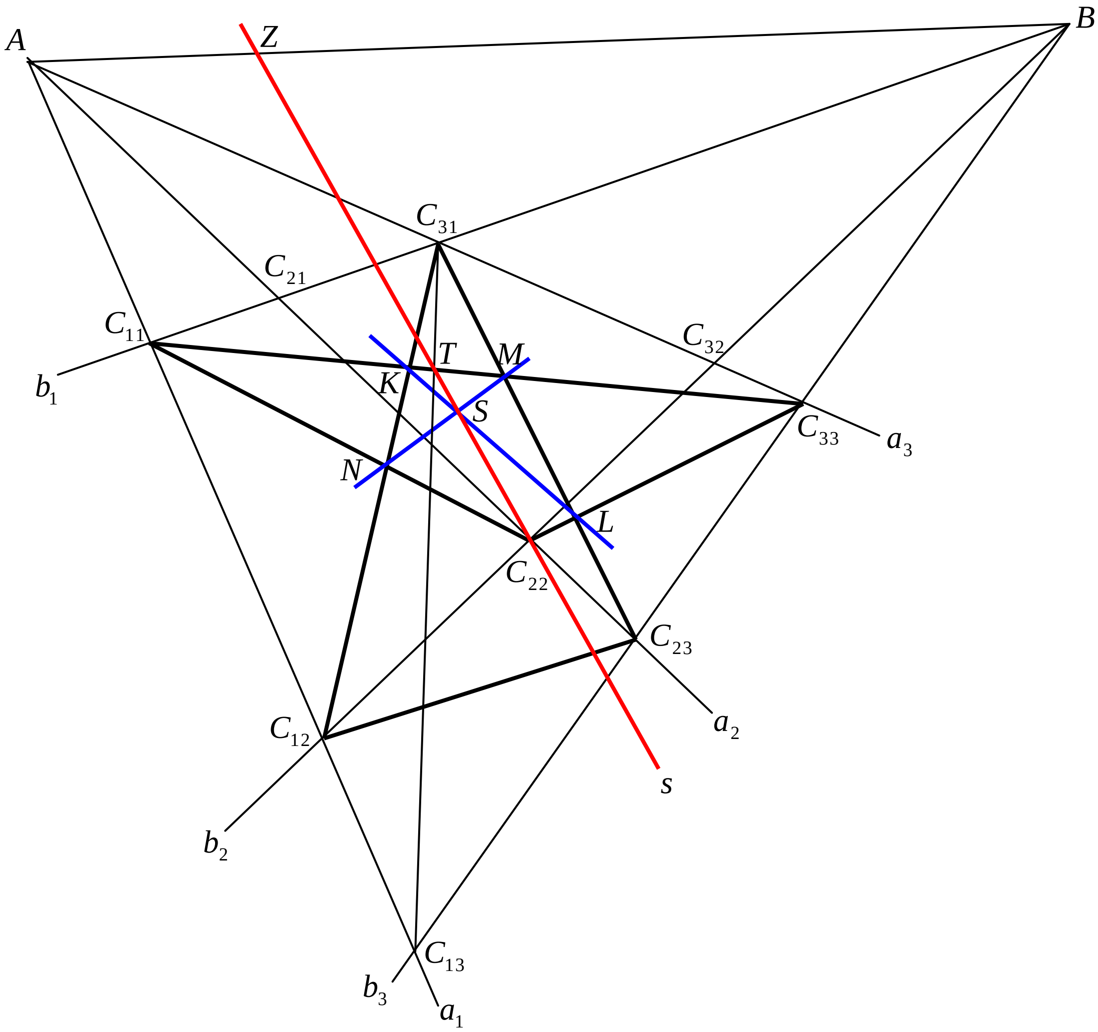

Рис. 1

Очевидно, что всего существует шесть пар вписанных треугольников, соответствующих сформулированной выше теореме. Каждая пара треугольников определяет две прямые Дезарга, т. к. наши треугольники перспективны относительно двух центров перспективы: точка $\boldsymbol{A}$ и точка $\boldsymbol{B}$. Следовательно, в точке $\boldsymbol{S}$ должно пересекаться двенадцать прямых Дезарга.

Для доказательства теоремы нам потребуется вычислять координаты точек и коэффициенты прямых, поэтому необходимо ввести некоторые общие обозначения.

Уравнение прямой на проективной плоскости имеет вид:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{1}$$

Другими словами, можно сказать, что точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на прямой $u(u_1 : u_2 : u_3)$. Две точки $M(m_1 : m_2 : m_3)$ и $N(n_1 : n_2 : n_3)$ определяют прямую $MN \equiv u(u_1 : u_2 : u_3)$, где

$$u_1 = \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix}; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично, две прямые $m(m_1 : m_2 : m_3)$ и $n(n_1 : n_2 : n_3)$ пересекаются в точке $m \cap n \equiv U(u_1 : u_2 : u_3)$, где координаты u_i также определяются выражениями (2).

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство:

Рассмотрим конфигурацию прямых и точек на Рис. 1 в проективном репере $\{A; C_{13}; B; C_{31}\}$, где $A(1:0:0)$, $C_{13}(0:1:0)$, $B(0:0:1)$, $C_{31}(1:1:1)$.

Пусть точка C_{22} имеет координаты $(1:m:n)$. Не трудно вычислить координаты остальных точек C_{ij}.

$$AC_{13} \cap BC_{31} \equiv C_{11}(x_1 : x_2 : x_3).$$

Вычислим коэффициенты прямых AC_{13} и BC_{31}. Для прямой AC_{13} имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

т. е. $$AC_{13}(0:0:1).$$

Для BC_{31}:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$BC_{31}(-1:1:0)$$

Теперь находим координаты точки $C_{11}(x_1 : x_2 : x_3)$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Т. е. можем записать $C_{11}(1:1:0)$, т. к. однородные координаты x_i имеют значения с точностью до общего множителя $t \neq 0$.

Аналогично находим координаты и остальных точек C_{ij}.

$$C_{21}(m:m:n); \quad C_{12}(1:m:0); \quad C_{32}(1:m:m); \quad C_{23}(0:m:n); \quad C_{33}(0:1:1).$$

Найдём коэффициенты прямых $C_{11}C_{33}$ и $C_{31}C_{13}$.
Для $C_{11}C_{33}$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

или

$$C_{11}C_{33}(1:-1:1)$$

Для $C_{31}C_{13}$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

или

$$C_{31}C_{13}(1:0:-1).$$

Теперь можем вычислить координаты точки $T \equiv C_{11}C_{33} \cap C_{31}C_{13}$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

или

$$T(1:2:1).$$

Координаты точек T и C_{22} известны и мы можем найти коэффициенты прямой TC_{22}, именно на этой прямой должна лежать точка S.

Для $TC_{22}(u_1 : u_2 : u_3)$ имеем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & n \end{vmatrix} = 2n - m; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = 1 - n; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2.$$

$$TC_{22} \equiv s \equiv (2n - m : 1 - n : m - 2).$$

Рассмотрим два треугольника, вписанных в пересечение данных пучков, $C_{11}C_{33}C_{22}$ и $C_{12}C_{31}C_{23}$.

Определим для данных треугольников прямые Дезарга относительно центра перспективы A и относительно центра перспективы B.

Точки $K \equiv C_{12}C_{31} \cap C_{11}C_{33}$ и $L \equiv C_{22}C_{33} \cap C_{23}C_{31}$ определяют прямую Дезарга KL для данных треугольников, относительно центра перспективы A.

Прямая $C_{12}C_{31}$ имеет коэффициенты:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m; \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$C_{12}C_{31}(m : -1 : 1 - m).$$

Коэффициенты прямой $C_{11}C_{33}$ известны, можем вычислить координаты точки K.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -m; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1-m & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m; \quad x_3 = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$K(m : 2m - 1 : m - 1).$$

Вычислим коэффициенты прямых $C_{22}C_{33}$ и $C_{23}C_{31}$.

Для $C_{22}C_{33}$ получаем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - n; \quad u_2 = \begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{22}C_{33}(m - n : -1 : 1);$$

для $C_{23}C_{31}$ получаем:

$$u_1 = \begin{vmatrix} m & n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - n; \quad u_2 = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = n; \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -m,$$

$$C_{23}C_{31}(m - n : n : -m).$$

Находим координаты точки L.

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ n & -m \end{vmatrix} = m - n; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & m-n \\ -m & m-n \end{vmatrix} = (m - n)(m + 1);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} m-n & -1 \\ m-n & n \end{vmatrix} = (m-n)(n+1),$$

$$L(1 : m+1 : n+1).$$

Вычислим коэффициенты для прямой Дезарга KL.

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2m-1 & m-1 \\ m+1 & n+1 \end{vmatrix} = 2m + 2mn - n - m^2; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} m-1 & m \\ n+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - mn;$$

$$u_3 = \begin{vmatrix} m & 2m-1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m + 1,$$

$$KL(2m + 2mn - n - m^2 : -1 - mn : m^2 - m + 1).$$

Теперь можем вычислить координаты точки $S \equiv TC_{22} \cap KL$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} n-1 & m-2 \\ -1-mn & m^2 - m + 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-n-1);$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2n-m \\ m^2 - m + 1 & 2m + 2mn - n - m^2 \end{vmatrix} = 3m(m-n-1);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2n-m & 1-n \\ 2m + 2mn - n - m^2 & -1-mn \end{vmatrix} = (n+m)(m-n-1),$$

$$S(m+1 : 3m : n+m).$$

Убедимся, что прямая Дезарга, рассматриваемых треугольников, относительно центра перспективы B проходит через точку S.

Введём обозначения: $M \equiv C_{11}C_{33} \cap C_{31}C_{23}$, $N \equiv C_{11}C_{22} \cap C_{31}C_{12}$. Тогда прямая MN будет прямой Дезарга, рассматриваемых треугольников, относительно центра перспективы B.

Мы уже вычислили коэффициенты прямых

$$C_{11}C_{33}(1 : -1 : 1), \quad C_{23}C_{31}(m-n : n : -m), \quad \text{и} \quad C_{12}C_{31}(m : -1 : 1-m).$$

Определим коэффициенты прямой $C_{11}C_{22}$.

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = -n; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m-1,$$

$$C_{11}C_{22}(n : -n : m-1).$$

Вычислим координаты точек $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$.

Для $\boldsymbol{M}$ будем иметь:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ n & -m \end{vmatrix} = m - n; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m-n \end{vmatrix} = 2m - n; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m-n & n \end{vmatrix} = m,$$

$$M(m-n : 2m-n : m).$$

Для $\boldsymbol{N}$:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ -n & m-1 \end{vmatrix} = (1-m)(1+n);$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1-m & m \\ m-1 & n \end{vmatrix} = (1-m)(m+n);$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} m & -1 \\ n & -n \end{vmatrix} = (1-m)n,$$

$$N(1+n : m+n : n).$$

Зная координаты точек $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{S}$, не трудно убедиться, что все они лежат на одной прямой. Вычислим определитель, составленный из координат этих точек.

$$\begin{vmatrix} m-n & 2m-n & m \\ 1+n & m+n & n \\ m+1 & 3m & n+m \end{vmatrix} = (m-n)(m+n)^2 + n(m+1)(2m-n) + 3m^2(1+n) -$$

$$-m(m+1)(m+n) - 3mn(m-n) - (1+n)(2m-n)(n+m) = 0.$$

Как видим, данный определитель равен нулю. Следовательно, точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{S}$ лежат на одной прямой.

Аналогичными вычислениями доказывается, что и остальные десять прямых Дезарга проходят через точку $\boldsymbol{S}$.

Нам осталось вычислить сложное отношение четырёх точек (ZS, TC_{22}). Координаты трёх точек известны. Необходимо вычислить координаты точки $Z \equiv AB \cap s$.

Вычислим предварительно коэффициенты прямой $\boldsymbol{AB}$

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \qquad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$AB(0:1:0).$$

Тогда для точки $\boldsymbol{Z}$ будем иметь:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & m-2 \end{vmatrix} = m-2;$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m-2 & 2n-m \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2n-m & 1-n \end{vmatrix} = m-2n.$$

$$Z(m-2:0:m-2n).$$

Вычислим сложное отношение (ZS, TC_{22}).

$$(ZS, TC_{22}) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{m-2} & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{m+1} & 1 \\ \mathbf{3m} & \mathbf{m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{m-2} & 1 \\ 0 & \mathbf{m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{m+1} & 1 \\ \mathbf{3m} & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(m-2)(m^2-2m)}{m(m-2)(2-m)} = -2.$$

Таким образом, все пункты нашей теоремы доказаны.

Теорема о точке, прямой и треугольнике

Как известно, тремя основными понятиями и объектами как в планиметрии, так и в проективной геометрии являются точка, прямая и треугольник.

Для произвольной точки, произвольной прямой и произвольного треугольника справедлива следующая

Теорема: **Если точки B_i являются проекциями вершин A_i треугольника $A_1 A_2 A_3$ на противоположные стороны $A_j A_k$ относительно произвольной точки P и произвольная прямая f пересекает стороны $A_j A_k$ в точках C_i соответственно, то точки пересечения прямых $B_i B_j$ и прямых $A_k C_k$ лежат на одной прямой t.**

Сделаем чертёж.

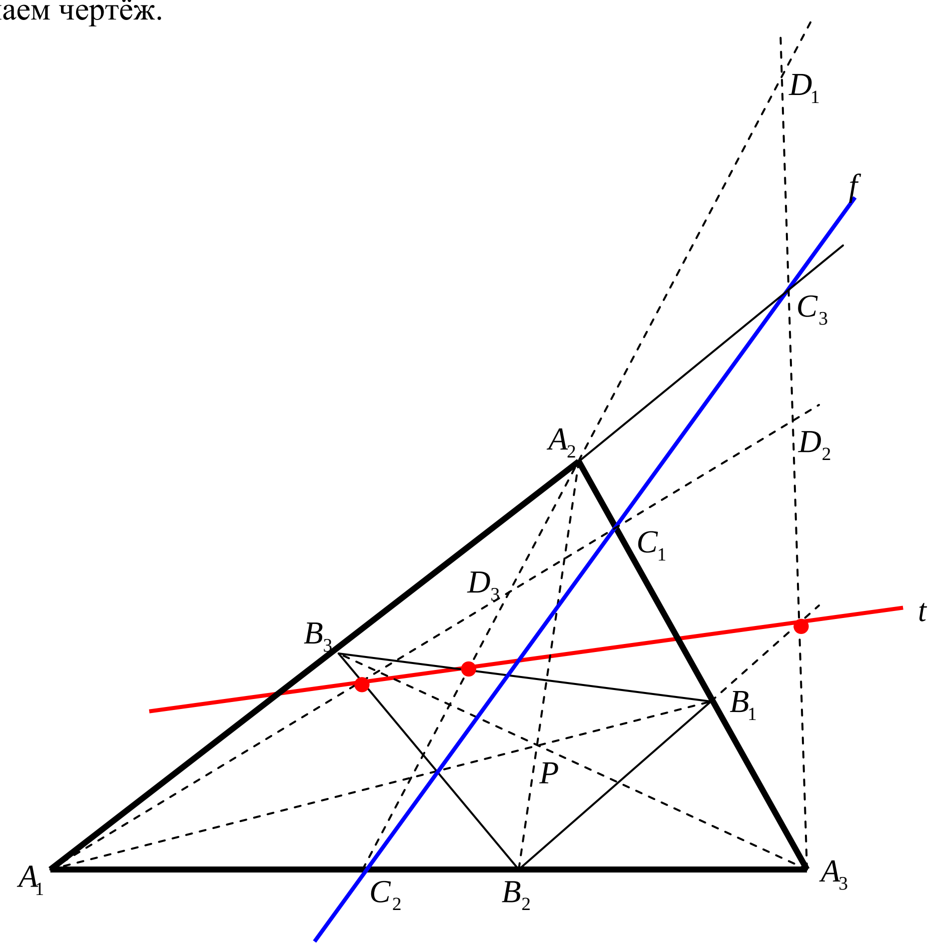

Рис. 1

Доказательство:

Рассмотрим треугольник $D_1 D_2 D_3$, где $D_i \equiv A_j C_j \cap A_k C_k$, и треугольник $A_1 A_2 A_3$.

Здесь $\boldsymbol{A_i A_j} \cap \boldsymbol{D_i D_j} \equiv \boldsymbol{C_k}$ и $\boldsymbol{C_k} \in \boldsymbol{f}$ по условию теоремы. Следовательно, по теореме Дезарга, прямые $\boldsymbol{A_i D_i}$ конкурентны.

Напомним, что треугольник называется вписанным в другой треугольник, если каждой стороне последнего принадлежит строго одна вершина первого. Таким образом, для каждой вершины последнего треугольника существует противолежащая вершина первого треугольника.

Треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ вписан в треугольник $\boldsymbol{D_1 D_2 D_3}$ и их противолежащие вершины конкурентны, как было доказано выше. Треугольник $\boldsymbol{B_1 B_2 B_3}$ вписан в треугольник $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}$ и прямые $\boldsymbol{A_i B_i}$ конкурентны в точке $\boldsymbol{P}$ по условию теоремы. Известно, что свойство конкурентности прямых, проходящих через противолежащие вершины вписанного и описанного треугольников, обладают свойством транзитивности. Т.е. прямые $\boldsymbol{D_i B_i}$ будут конкурентны. И, следовательно, по теореме Дезарга, прямые $\boldsymbol{B_i B_j}$ и прямые $\boldsymbol{D_i D_j}$ будут пересекаться в точках, лежащих на одной прямой . Но $\boldsymbol{D_i D_j} \equiv \boldsymbol{A_k C_k}$, следовательно, прямые $\boldsymbol{B_i B_j}$ и $\boldsymbol{A_k C_k}$ пересекаются в точках, лежащих на одной прямой $\boldsymbol{t}$.

Что и требовалось доказать.

Многие теоремы проективной геометрии имеют интересные частные случаи и следствия для планиметрии.

Рассмотрим один из них.

Введём обозначения для треугольников $\boldsymbol{A_1 A_2 A_3}: \Delta(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{B_1 B_2 B_3}: \Delta(\boldsymbol{B})$. Тогда на языке преобразований трансформацию прямой $\boldsymbol{f}$ в прямую $\boldsymbol{t}$ можно записать таким образом:

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{\Delta(A),P} \boldsymbol{t}$$

Если прямая $\boldsymbol{f}$ проходит через центр окружности, описанной около треугольника $\Delta(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{f}$, то $\boldsymbol{f} \xrightarrow{\Delta(A),P} \boldsymbol{t} \xrightarrow{\Delta(B),P} \boldsymbol{f}$, где $\Delta(\boldsymbol{B}) \xleftarrow{\nabla,P} \Delta(\boldsymbol{A})$, (здесь символ $\nabla, \boldsymbol{P}$ обозначает проективное соответствие относительно точки $\boldsymbol{P}$). Т. е. вторая трансформация прямую $\boldsymbol{t}$ снова переводит в прямую $\boldsymbol{f}$.

Теорема о вписанных четырёхугольниках

Теорема: **Если два четырёхугольника, вписанных в общую конику, имеют общую точку *O* - пересечения диагоналей, то прямые, проходящие через противоположные вершины восьмиугольника, образованного последовательным пересечением сторон данных четырёхугольников, конкурентны в точке *O*.**

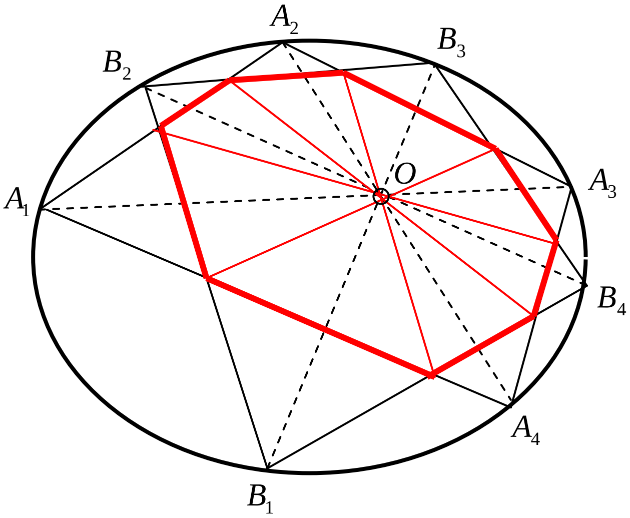

Рис. 1

Доказательство:

Рассмотрим шестиугольник $B_1 B_2 A_3 A_1 A_4 B_3$ Рис. 2.

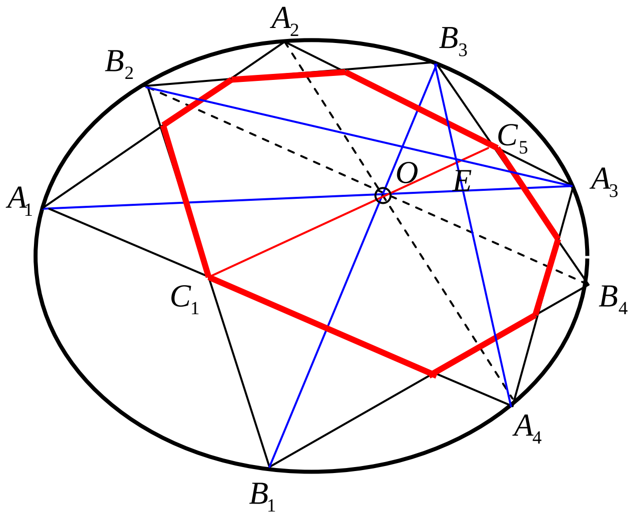

Рис. 2

Определим точки пересечений его противоположных сторон.

$$B_1 B_2 \cap A_1 A_4 \equiv C_1 ; \; B_2 A_3 \cap A_4 B_3 \equiv E ; \; A_3 A_1 \cap B_3 B_1 \equiv O .$$

По теореме Паскаля точки $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{O}$ лежат на одной прямой.

Рассмотрим ещё один шестиугольник $\boldsymbol{A_4A_2A_3B_2B_4B_3}$ и найдём точки пересечений его противоположных сторон.

$$\boldsymbol{A_1A_2 \cap B_2B_4 \equiv O};\quad \boldsymbol{A_2A_3 \cap B_4B_3 \equiv C_5};\ \boldsymbol{A_3B_2 \cap B_3A_4 \equiv E}.$$

Т.е. точки $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{C_5}$ и $\boldsymbol{E}$ лежат также на одной прямой Паскаля. Отсюда заключаем, что и точки $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{C_5}$ принадлежат одной прямой. Но точки $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{C_5}$ являются противоположными вершинами, интересующего нас восьмиугольника.

Аналогично доказывается, что и другие прямые, проходящие через противоположные вершины полученного восьмиугольника, также проходят через точку $\boldsymbol{O}$.

Что и требовалось доказать.