

**Франц Герман**  
[franz.h-n@yandex.ru](mailto:franz.h-n@yandex.ru)

## Введение в теорию касательных сфер

*Эти кривые могут быть определены  
многими различными способами*

Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер

В данной статье мы познакомим читателя с теорией кривых центров (ТКЦ), как с альтернативной теорией для теории конических сечений (ТКС).

Рассмотрим две произвольные непересекающиеся окружности. Очевидно, что построить касательную окружность к этим двум данным окружностям можно различными четырьмя способами (Рис. 1).

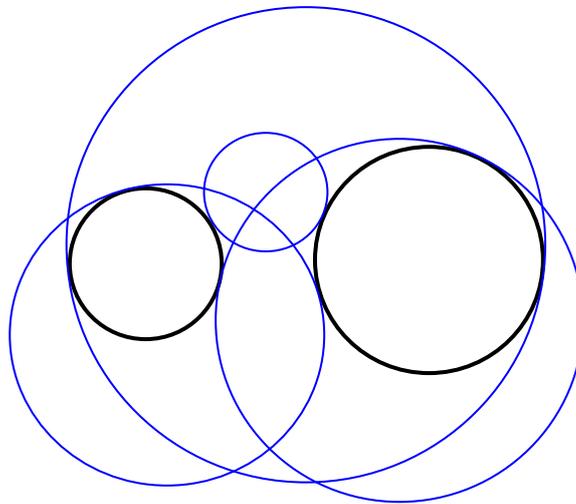


Рис. 1

Построенная окружность может касаться двух данных снаружи. А может - и изнутри. Кроме того, построенная окружность может касаться одну данную окружность снаружи, а другую при этом – изнутри. И наоборот. Т. е., как и было сказано, - четырьмя различными способами. И, кроме того, в каждом из этих четырёх случаев построенная окружность не является единственной.

Рассмотрим первый случай, когда окружность касается двух данных снаружи.

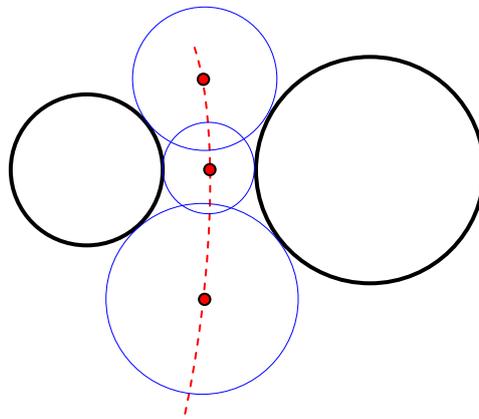


Рис. 2

На Рис. 2 показан пример - три окружности первого типа. Очевидно, что построить таких окружностей можно бесконечно много. Нас будет интересовать задача поиска геометрического места точек, где лежат центры построенных окружностей. Т. е. аналитический вид такой кривой. Мы будем называть её **кривой центров**.

Введём систему координат, как показано на Рис. 3.

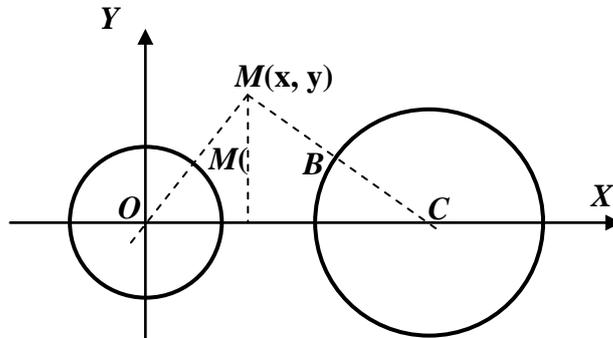


Рис. 3

Пусть  $OC = n$ ,  $OA = r$ ,  $CB = R$ .  $M$  – текущая точка искомой кривой, т. е. центр некоторой окружности, касающейся двух данных внешним образом. Тогда можем записать:  $\sqrt{x^2 + y^2} = r + AM$ , но т. к. точка  $M$  – центр окружности, которая касается двух данных, то  $AM = MB = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - R$ . Подставляя  $AM$  в первое выражение получаем:

$$R - r = \sqrt{(n-x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Выражение (1) и будет уравнением кривой центров.

Не трудно понять, что (1) является уравнением второго порядка, а это значит, что наша кривая принадлежит к классу линий конического сечения (исключая, конечно, вырожденные случаи). Попробуем разобраться, что же это за линия.

Правая часть выражения (1) – это ни что иное, как разность расстояний текущей точки искомой кривой до двух фиксированных точек  $C$  и  $O$ . Причём разность эта есть величина постоянная –  $(R - r)$ . Именно таким свойством обладает гипербола [1]. Глядя на Рис. 2 понятно, что найденная кривая центров ни что иное, как левая ветвь гиперболы, а точки  $O$  и  $C$  – её фокусы. Пусть  $x_0$  – точка пересечения кривой центров с осью абсцисс. Т. е.  $x_0 = \frac{n - R + r}{2}$ . Пользуясь классической терминологией [3] введём обозначения:  $n = 2c$  – межфокусное расстояние, а  $R - r = 2a$  – абсолютная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов. Теперь сделаем преобразования координат:  $Y^* = Y$ ,  $X^* = X - \frac{n}{2}$ . Переходя к новым координатам и используя принятые обозначения получаем:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} - \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

здесь  $b^2 = c^2 - a^2$ . Т. е. получаем канонический вид уравнения гиперболы.

Рассмотрим второй случай, когда построенная окружность касается данные окружности изнутри.

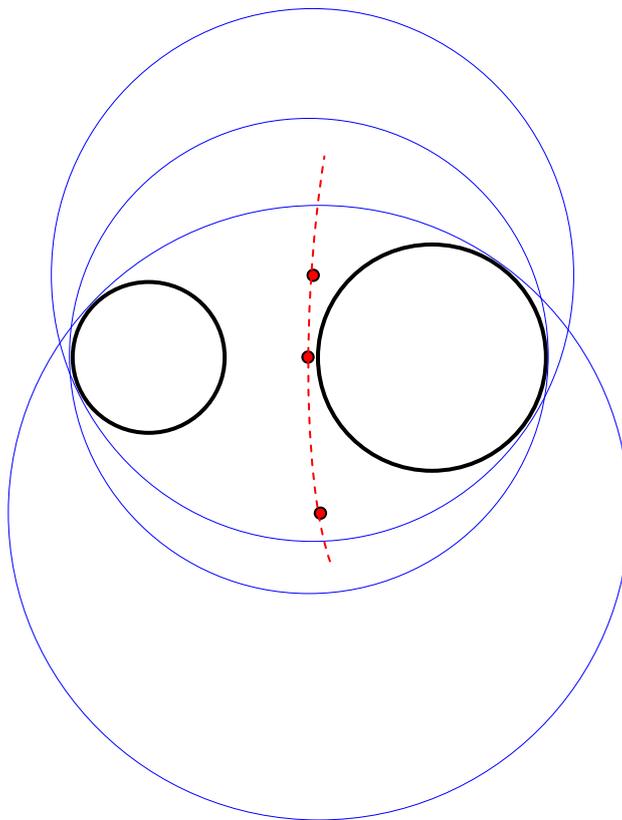


Рис. 4

Введём систему координат аналогичным образом, как мы делали это для первого случая.

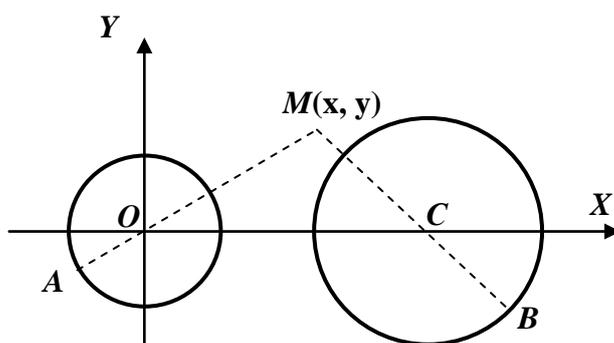


Рис. 5

В данном случае будем иметь:  $AM = MB$ . Расписывая это равенство получаем такое выражение:

$$R - r = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(n - x)^2 + y^2}. \quad (3)$$

Не трудно заметить, что уравнение (3) отличается от уравнения (1) лишь тем, что слагаемые в правой части поменялись местами. Т. е. уравнение (3) – это правая ветвь гиперболы (2).

Объединяя (1) и (3) можем записать общее уравнение:

$$R - r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \mp \sqrt{(n-x)^2 + y^2}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда касательная окружность касается одну из окружностей снаружи, а вторую изнутри (Пример, Рис. 6).

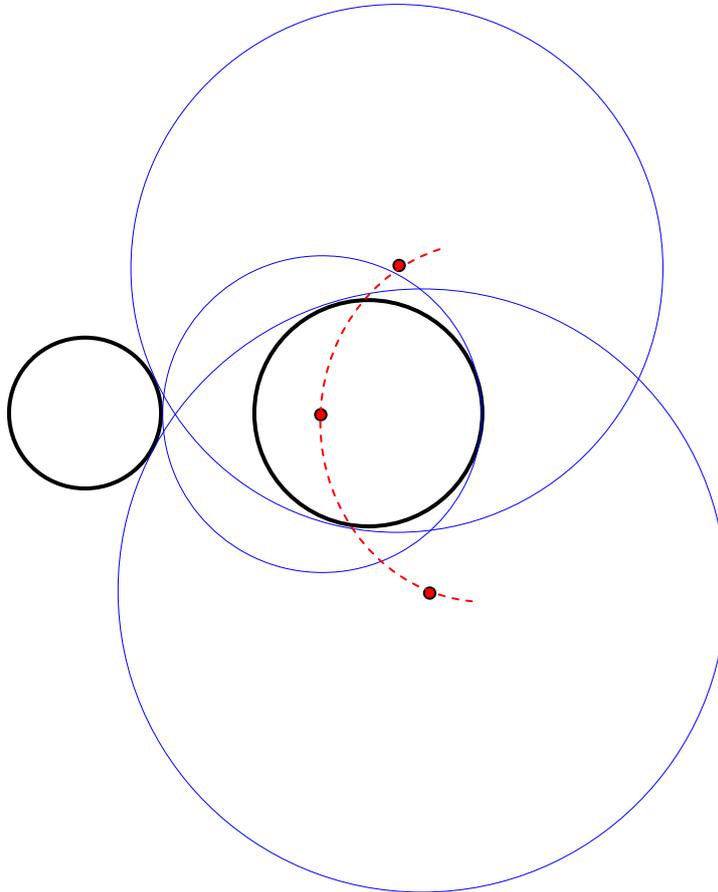


Рис. 6

Введём систему координат и выведем уравнение кривой центров.

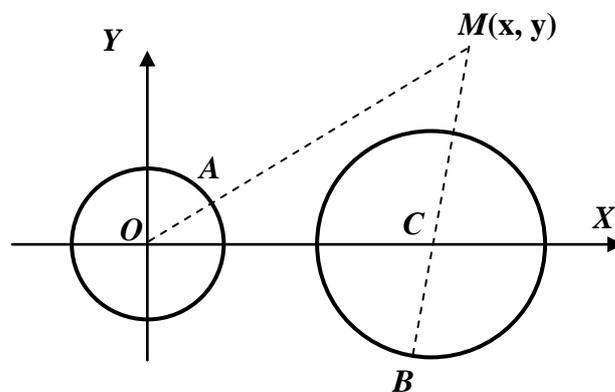


Рис. 7

Как и в предыдущих случаях точка  $A$  и точка  $B$  являются точками касания окружности, центр которой находится в точке  $M$ . Т. е.  $AM = MB$ . Отсюда приходим к уравнению:

$$R + r = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-n)^2 + y^2} \quad (5)$$

Как видим, снова получили уравнение одной из ветвей гиперболы с той лишь разницей, что теперь  $2a = R + r$  при том же межфокусном расстоянии. По аналогии с предыдущим случаем можем записать общее уравнение гиперболы данного типа:

$$R + r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \mp \sqrt{(x-n)^2 + y^2} . \quad (6)$$

Все четыре случая мы рассмотрели. Напомним, что наши окружности не пересекались друг друга, т. е.  $n > R + r$ .

Теперь рассмотрим случай, когда исходные окружности также не пересекаются друг друга, но  $r < n < R$ . Т. е. одна окружность целиком находится внутри другой окружности.

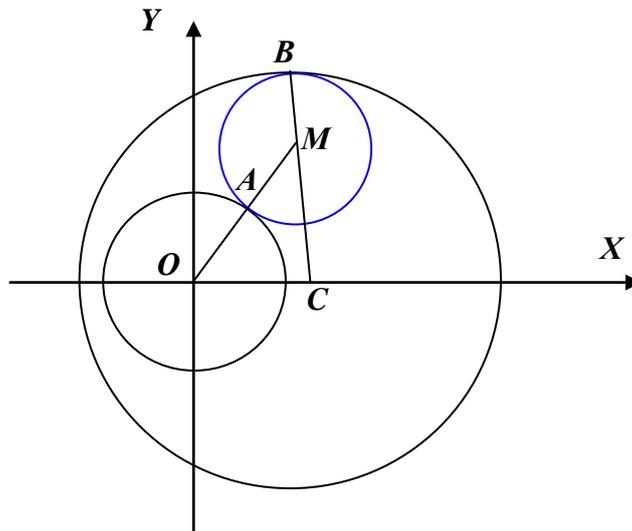


Рис. 8

Точка  $M(x,y)$  – текущая точка кривой центров для данного случая. Т. е., как и прежде,  $AM = MB$  (Рис. 8). Получаем такое уравнение:

$$R + r = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-n)^2 + y^2} . \quad (7)$$

Сумма слагаемых в правой части (7) говорит о постоянстве суммы расстояний от точки кривой центров до точек  $O$  и  $C$ . Именно таким свойством обладает эллипс.

Переходя к новым координатам  $Y^* = Y$ ,  $X^* = X - \frac{n}{2}$  и упрощая выражение (7) получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

где  $n = 2c$ ,  $R + r = 2a$ , а  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Заметим, что касательную окружность можно построить и по-другому (Рис. 9). В этом случае вместо (7) получаем такое уравнение:

$$R - r = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - n)^2 + y^2}. \quad (9)$$

Как видим, это тоже уравнение эллипса, только  $2a = R - r$ .

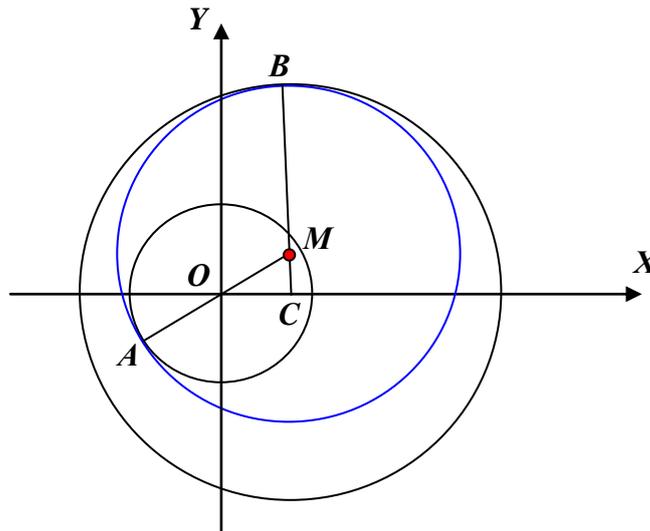


Рис. 9

Общее уравнение для (7) и (9) будет иметь вид:

$$R \pm r = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - n)^2 + y^2}. \quad (10)$$

Итак, мы получили шесть кривых (четыре ветви гипербол и два эллипса).

Теперь рассмотрим, так сказать, смешанный случай, когда данные окружности частично накрывают друг друга (Рис. 10).

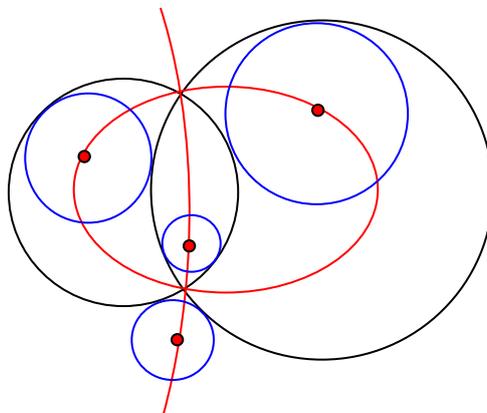


Рис. 10

Как видим, геометрическое место точек, равноудалённых от данных окружностей распалось на две части. Часть точек ложится на кривую, напоминающую эллипс, часть точек лежит вроде бы на гиперболе.

Рассмотрим более подробно этот случай.

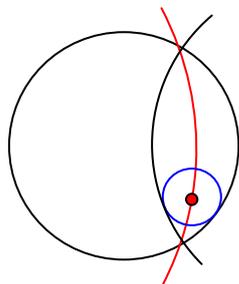


Рис. 11

Построенная окружность касается данные окружности изнутри. Мы ещё не рассматривали такой случай, но при выводе уравнения для кривой центров мы получаем уравнение (1). Это действительно оказалась левая ветвь гиперболы.

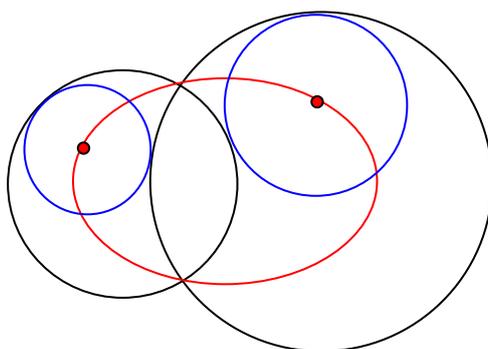


Рис. 12

Выводя уравнение для второго случая (Рис. 12) убеждаемся, что данная кривая описывается уравнением (7), т. е. это действительно первый из рассмотренных эллипсов.

Нам осталось рассмотреть только несколько предельных (особых) случаев. В нашем исследовании фигурируют три параметра:  $R$ ,  $r$  и  $n$ .

1). Рассмотрим первый предельный случай, когда  $n = 0$ .

Очевидно, что в этом случае центры данных окружностей совпадают (данные окружности – концентрические). Понятие гиперболы вообще исчезает, а эллипс превращается в окружность.

2). Рассмотрим случай, когда  $R = r$ ,  $n > 2R$ .

В этом случае уравнение (4) превращается в уравнение прямой  $x = \frac{n}{2}$ .

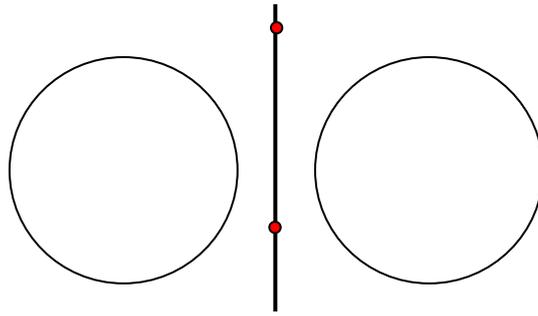


Рис. 13

Т. е. оси гиперболы сливаются, разгибаясь в прямую.

Для эллипса при  $R = r$  имеем  $n = 0$ . Т. е. эллипс вырождается либо в окружность, либо в точку.

3). Рассмотрим случай, когда один из радиусов равен нулю, например  $r = 0$ . В этом случае геометрический смысл найденных уравнений для гиперболы остаётся неизменным – сохраняются и первый тип кривой и второй. А два типа эллипсов сливаются в один.

4). В четвёртом случае рассмотрим ситуацию, когда один из радиусов исходных окружностей неограниченно является большим, т. е., например  $r = \infty$ . На рисунке это будет выглядеть так (Рис. 14).

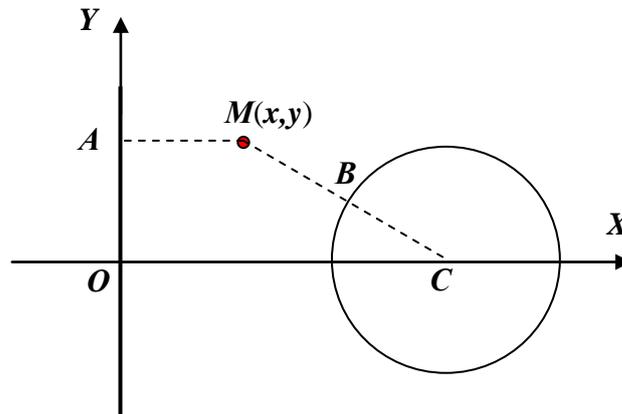


Рис. 14

Здесь  $M$  – текущая точка искомой кривой и  $AM = MB$ . Окружность бесконечно большого радиуса представляется прямой  $OA$ . По сути дела точка  $M$

Исходя из этих условий получаем уравнение кривой центров для данного случая:

$$y^2 = 2(R + n)x + R^2 - n^2. \quad (11)$$

Введя дополнительное обозначение  $R + n = p$  и, переходя к новым координатам по формулам:  $Y^* = Y$ ;  $X^* = X - \frac{n - R}{2}$ , получаем уравнение.

$$(y^*)^2 = 2px^*. \quad (12)$$

А это ни что иное, как каноническое уравнение параболы.

Очевидно, что рассматривая случай при  $R = \infty$ , мы получим вторую ветвь параболы:

$$y^2 = -2(r+n)x + (n+r)^2. \quad (13)$$

Чтобы получить канонический вид уравнения этой ветви параболы необходимо применить преобразования:  $Y^* = Y$ ;  $X^* = X - \frac{n+r}{2}$ .

В уравнениях (11) и (13) присутствует только один радиус либо  $R$ , либо  $r$ . Поэтому чтобы унифицировать эти выражения будем вместо них использовать  $R^*$ . Тогда уравнение параболы в общем случае можем записать в таком виде:

$$y^2 = \pm(R^*+n)(2x \pm (R^* \mp n)). \quad (14)$$

В рамках последнего случая рассмотрим ситуацию **4а**), когда  $r = 0$  и  $R = \infty$  (либо наоборот  $R = 0$  и  $r = \infty$ ). Уравнение (14) принимает вид:  $y^2 = \pm 2nx \mp n^2$ .

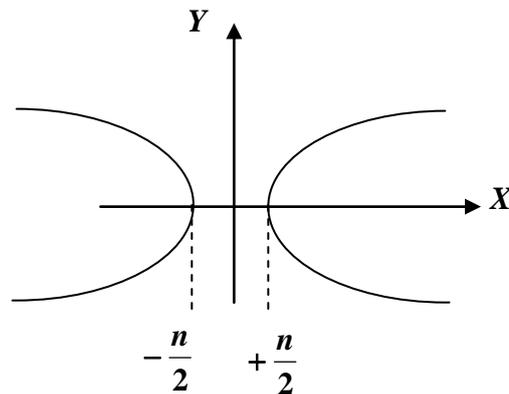


Рис. 15

И при переходе к новым координатам по формулам  $Y^* = Y$ ,  $X^* = X - \frac{n}{2}$  получаем канонический вид уравнения параболы:

$$(y^*)^2 = 2nx^*.$$

И рассмотрим ещё один предельный случай, когда  $r = \infty$ ,  $n = 0$ .

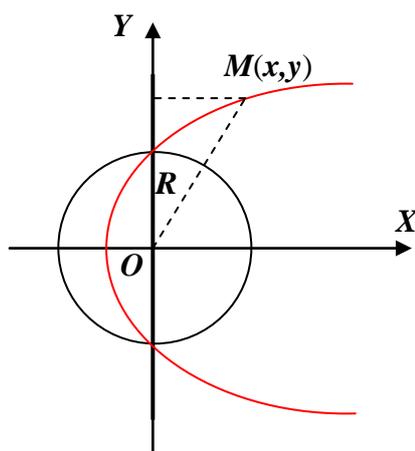


Рис. 16

В этом случае получаем такое уравнение:  $y^2 = 2xR + R^2$ , а переходя к новым координатам по формулам  $y = y^*$ ,  $x = x^* - \frac{R}{2}$  приходим к каноническому виду:

$$(y^*)^2 = 2Rx^*. \quad (15)$$

Мы рассмотрели практически все основные объекты нашей теории. По сути дела мы доказали следующую теорему.

**Теорема:**

*Если даны две произвольные окружности, то центр окружности, касательной к данным, принадлежит кривой центров (коническому сечению).*

Мы по-прежнему используем термин «коническое сечение» хотя можно было бы уже говорить в рамках новой теории – просто «кривая центров». Тогда уместно следующее определение (мы о нём уже вскользь упоминали):

**Определение:**

*Кривой центров называется геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных окружностей.*

Теперь нам предстоит заняться сравнительным анализом двух теорий: ТКС (теория конических сечений) и ТКЦ (теория кривых центров).

Конечно же ТКС известна с незапамятных времён. Она была известна ещё до Евклида, т. е. более 2000 лет назад [6]. Казалось бы, что за такой большой срок уже не должно остаться белых пятен в этой теории. Но скоро вы убедитесь, что это не так.

Практически в любом учебнике по аналитической геометрии есть раздел, посвящённый коническим сечениям. Мы в нашем исследовании будем пользоваться учебниками [1], [14], [5], [7], [8], которые можно с чистым сердцем назвать уже классикой аналитической геометрии.

Начнём с того, что перечислим все действительные конические сечения [8]. Сразу заметим, что в рамках данной статьи мы не будем касаться мнимостей. Мнимые сечения возникают в результате исследования теории кривых второго порядка,

благодаря аналитическому аппарату, а мы будем рассматривать только наглядные действительные образы.

Итак, имеем такие конические сечения: эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, пара совпадающих прямых и точка. Всего семь сечений.

А в ТКЦ мы получили: две гиперболы, два эллипса, две параболы, не считая кривых, полученных в предельных случаях. Т. е основных кривых (эллипс, гипербола, парабола) в ТКЦ ровно в два раза больше. Но с другой стороны в ТКЦ мы не столкнулись с парой пересекающихся прямых и парой параллельных прямых. В чём тут дело?

А дело в том, что классическая теория конических сечений для нахождения кривых использует только одну секущую плоскость. Напомним (Рис. 16).

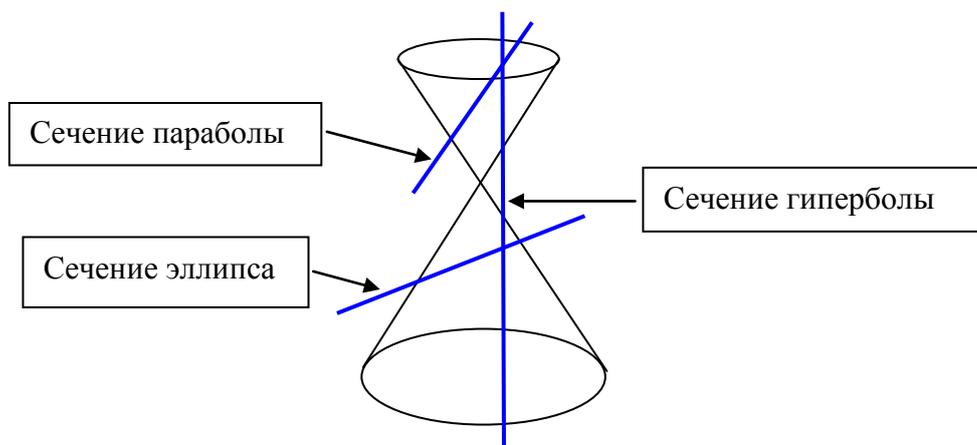


Рис. 17

Мы будем исходить из предположения, что обе теории изоморфны.

Вводя вторую секущую плоскость параллельно первой таким образом, чтобы точка центра конуса всегда находилась между плоскостями, получаем все недостающие сечения.

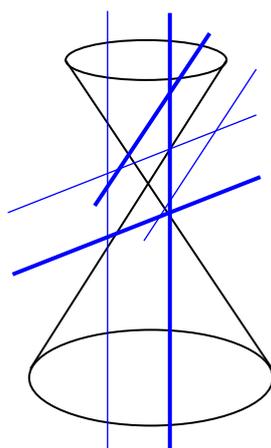


Рис. 18

Для сравнения двух теорий удобно ввести новое понятие – внутренняя структура теории. Чуть позже станет понятно, что это такое.

Рассмотрим внутреннюю структуру ТКС, т. е. те объекты и характеристические параметры, которые необходимы для получения всех интересующих нас сечений в рамках данной теории.

$$\text{ТКС: } \{ K^2; \pi_1; \pi_2; \alpha; \beta; D; (d, \gamma) \}. \quad (16)$$

Расшифруем выражение (16).

$K^2$  - это не «К» в квадрате, так обозначим конус (по аналогии с тором –  $T^2$  и сферой –  $S^2$ ). Двойка вверху говорит о том, что это поверхность второго порядка.

$\pi_i$  - обозначение секущих плоскостей.

$\alpha$  – характеристика конуса, угол между осевой линией и образующей конуса.

$\beta$  – угол между осевой линией конуса и секущей плоскостью. Например, при  $\beta = 0$  в сечении получается гипербола, при  $\beta = \alpha$  – парабола, при  $\alpha < \beta < 90^\circ$  - эллипс.

$D$  – расстояние от центра конуса до секущей плоскости.

$(d, \gamma)$  – расстояние и угол, определяющие взаимное расположение секущих плоскостей. Например, при  $d \neq 0$  и  $\gamma = 0$  секущие плоскости параллельны, а при  $d = 0$  и  $\gamma = 0$  они совпадают.

Теперь рассмотрим внутреннюю структуру ТКЦ. Но прежде введём определение. Связку окружностей, относительно которых идёт построение криво центров будем обозначать через  $k_i$ .

Итак, структура ТКЦ.

$$\text{ТКЦ: } \{ R^2; k_1; k_2; r; R; n; (a, \varphi) \}. \quad (17)$$

Рассмотрим последнюю структуру подробнее.

$R^2$  - традиционное обозначение действительной плоскости, а мы помним, что все построения у нас на плоскости.

$k_1$  и  $k_2$  - две связки окружностей.

$r$  и  $R$  – радиусы окружностей в связках.

$n$  – расстояние между центрами окружностей в связке.

$(a, \varphi)$  – расстояние и угол, определяющие взаимное расположение связок на плоскости.

Мы помним, что все построения ТКЦ выполнялись, используя только одну связку. Зачем же понадобилась ещё и вторая?

Рассмотрим две связки радиусов  $r$  и  $R$  произвольно расположенные относительно друг друга.

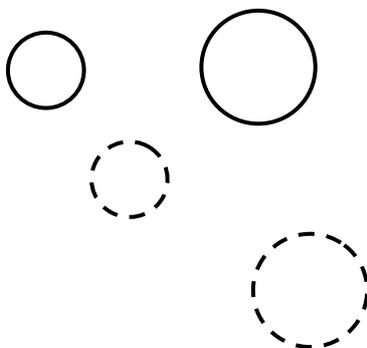


Рис. 19

Одна связка показана сплошной линией, другая – пунктирной. Ничто не ограничивает нас перегруппировать окружности в связках следующим образом (обратите внимание на пунктирные и сплошные линии в новых связках Рис. 20). Теперь, вновь образованные связки должны рассматриваться уже в рамках пункта 2). Т. е. при  $R = r$ . Здесь гипербола вырождается в прямую линию. Т. е. мы получаем в этом случае пару пересекающихся прямых.

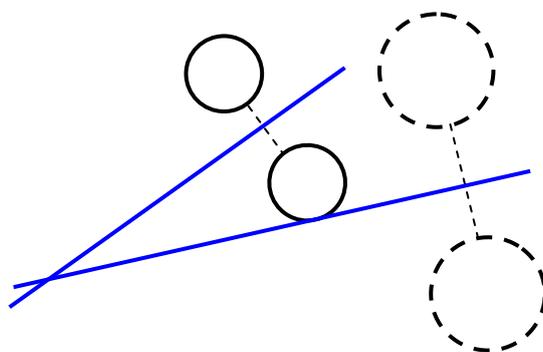


Рис. 20

Отметим, что это как раз и есть тот недостающий случай в ТКЦ, который мы упоминали когда занимались перечислением всех действительных сечений ТКС.

А если мы рассмотрим эту ситуацию, когда параметр  $a \neq 0$  и  $\varphi = 0$ , то получим в результате пару параллельных прямых – тоже недостающий случай.

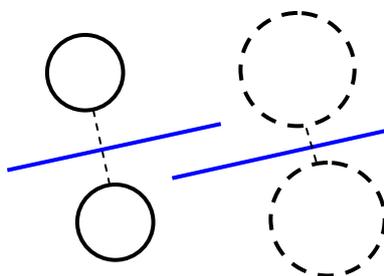


Рис. 21

Попробуем сравнить внутренние структуры поэлементно.  $K^2$  и  $R^2$  - объекты одного класса. Кстати коническая поверхность разворачивается на плоскость, т. е. у них одинаковая метрика и между ними можно построить изоморфизм.

Далее, наши структуры имеют: одна - две плоскости, другая - две плоские связки.

Кроме того каждая структура имеет по пять характеристических параметров. Все эти параметры относятся к категории метрики, т. е. углы и отрезки.

Т. о., несмотря на то, что наши структуры определяют пространства разных измерений (ТКС в  $R^3$ , а ТКЦ на  $R^2$ ) между ними очевиден изоморфизм, как мы и предполагали ранее.

Основные результаты теорий в виде уравнений для главных и частных случаев совпадают.

Можем сделать предположение, что в общем ТКС и ТКЦ тождественны.

Не говоря о плюсах и минусах (смешно было бы обсуждать теорию, имеющую замечательную характеристику уже более 2000 лет) просто отметим некоторые, легко заметные нюансы.

Надо сразу сказать, что в структуре ТКЦ речь идёт о простейшей связке. Вообще с какой стати ограничивать число окружностей.

Скажем также, что существует прекрасная теория кривых второго порядка (ТКВП), которая берёт своё начало от Декарта. И ТКС и ТКЦ просто являются частями общей всеобъемлющей ТКВП.

Многие теоремы ТКС просто не могут появиться в ТКЦ, так как они связаны непосредственно с конусом. Великий математик древности Евклид когда-то написал сочинение «Начала конических сечений» (к сожалению до нас не дошедшее). Другой великий математик древности Аполлоний главный труд своей жизни так и озаглавил «Конические сечения». До наших дней сохранились семь из восьми книг этого сочинения.\*)

Между тем, есть замечательное изложение кривых второго порядка (например [8]), где термин «коническое сечение» практически не используется (один раз). Дается уравнение  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$  и потом – определение: «Геометрическое место (или множество) точек, координаты которых удовлетворяют такому уравнению, называется *кривой второго порядка* (сокращённо **КВП**). [8]

Любопытно то, что пусть и неявно, но некоторые базовые понятия ТКС использовались ещё в древности. Например, понятие фокуса и директрисы. И во многих учебниках определение конического сечения дается операясь именно на эти понятия.

«Каждое коническое сечение, кроме окружности, представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки  $F$  и некоторой прямой  $\delta$  постоянно. Точка  $F$  называется фокусом конического сечения, а прямая  $\delta$  – директрисой.» [5].

Понятие эксцентриситета, насколько нам известно, не использовалось древними математиками, но сегодня ТКС использует эксцентриситет для определения принадлежности кривой к классу эллипсов, гипербол или парабол.

«Как эллипс, так и гипербола  $C$  с эксцентриситетом  $e$  есть геометрическое место точек  $M$  плоскости, удовлетворяющих следующему условию: отношение расстояния точки  $M$  до произвольно выбранного фокуса кривой к расстоянию точки  $M$  до соответствующей этому фокусу директрисы равно  $e$ .» [4]. Если эксцентриситет меньше единицы, то мы имеем эллипс, если равен единице – то парабола, если больше – то гипербола.

Конечно же сегодня в ТКВП используется много новых, интересных понятий. Например, инварианты кривой второго порядка [7] чего в древности просто не могло быть в силу отсутствия сегодняшнего аналитического мат. аппарата.

А вот именно прямое определение конического сечения: «Коническим сечением называется линия, по которой пересекается круговой конус с произвольной плоскостью, не проходящей через его вершину. Таким образом, коническими сечениями являются эллипс, гипербола и парабола» [1].

В ТКЦ нам вообще не потребовалось ни понятия директрисы, ни понятие эксцентриситета, хотя при желании это можно было бы сделать в силу изоморфности теорий. Здесь эллипс, гипербола и парабола определяются типом касания окружностей (снаружи, изнутри, смешанно или это некоторые предельные случаи).

\*) Автор надеется, что двухтомный труд Б. А. Розенфельда с полным переводом Аполлония и комментариями самого Розенфельда скоро появится в печати.

Окружности связки – это, так сказать, круговые директрисы центры которых являются фокусами кривой центров. Помним, что линия центров – это кривая, все точки которой равноудалены от двух данных окружностей.

Можно так же отметить, что если строго следовать последнему классическому определению, которое мы процитировали выше, то параболы никогда не пересекаются (как и гиперболы). Параболы лежат в разных плоскостях. Вообще, как правило, никто об этом не задумывается. После определения конические сечения, в основном, живут своей жизнью, а конус – своей.

А в ТКЦ можно рассмотреть предельную ситуацию ( $R = \infty$ ,  $n < r$ ), когда пересечение парабол, порождённых одной связкой, становится возможным (Рис. 22).

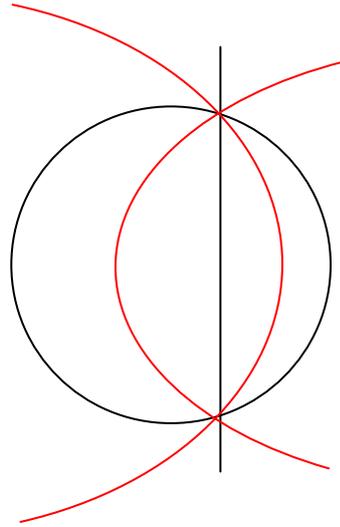


Рис. 22

Нам представляется существенным то, что каждая (из четырёх) гипербол ТКЦ является *самостоятельной*, а гиперболы ТКС появляются парами. В связи с этим упростим вид гиперболы ТКЦ первого типа.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x(x-c) + b^2}. \quad (18)$$

Напомним, что  $a = \frac{R-r}{2}$ ,  $c = \frac{n}{2}$ ,  $b^2 = c^2 - a^2$ . Очевидно, что ветвь нашей гиперболы при  $x = 0$  будут пересекать ось ординат в точках  $y = \pm \frac{b^2}{a}$ .

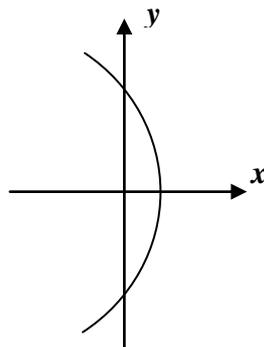


Рис. 23

Хотя надо помнить, что выбор начала координат – дело произвольное: куда надо туда и передвинем или повернём. Помещение начала координат в фокус для ТКЦ нам кажется более естественным, чем поиск точки начала где-то, например, на отрезке  $n$ , т. к. фокус – это центр одной из данных окружностей. Т. о. в данном случае начало координат находится в фокусе гиперболы, а отрезок, вооставленный из фокуса общепринято называется фокальным параметром. Координаты, центр которых находится в фокусе, будем называть **фокальными координатами**. Если вернёмся к Рис. 10, то можно отметить, что здесь фокальный параметр и для гиперболы и для эллипса совпал. Как было показано ранее – наша гипербола пересекает ось абсцисс в точке  $x_0 = c - a$ .

Возникает ещё одна, интересная на наш взгляд задача. Построение наших кривых по точкам. Существует множество возможностей решения этой задачи, например [1], но с помощью ТКЦ для этой задачи существует единый подход.

Рассмотрим построение кривой первого типа. Пусть даны две окружности:  $A^1(O, r)$  и  $B^1(C, R)$ . Для определённости пусть  $R > r$ .  $OC = n$ . Введём дополнительные обозначения для фокальных радиусов:  $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\rho_2 = \sqrt{(n-x)^2 + y^2}$  (см. (1)). Тогда  $\rho_2 = \rho_1 + (R - r)$ . Последнее выражение и будет рабочей формулой для построения кривой по точкам. Длина радиуса  $\rho_1$  выбирается произвольно и из точки  $O$  проводится дуга окружности этого радиуса. Затем вычисляется соответствующая длина радиуса  $\rho_2$  по рабочей формуле и проводится дуга окружности из точки  $C$ . Точки пересечения этих дуг и будут точками искомой кривой. Надо помнить, что  $\rho_1 \geq \frac{n}{2} - (R - r)$ .

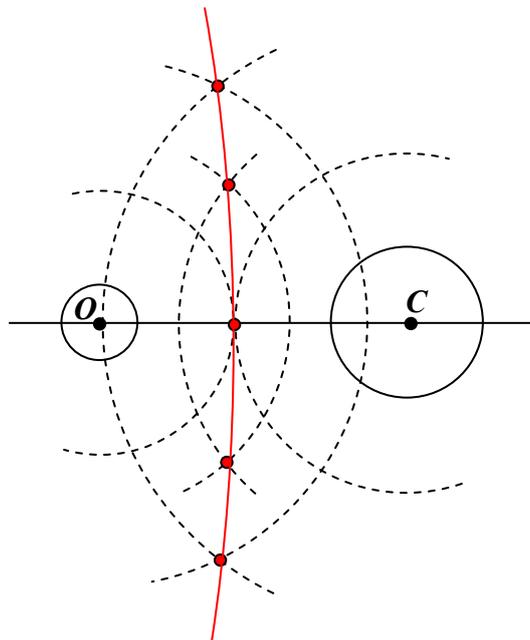


Рис. 24

Покажем построение кривой четвёртого типа. Ей соответствует уравнение (5). Рабочая формула будет иметь вид:  $\rho_2 = \rho_1 - (R + r)$ , а  $\rho_1 \geq \frac{n + R + r}{2}$ .

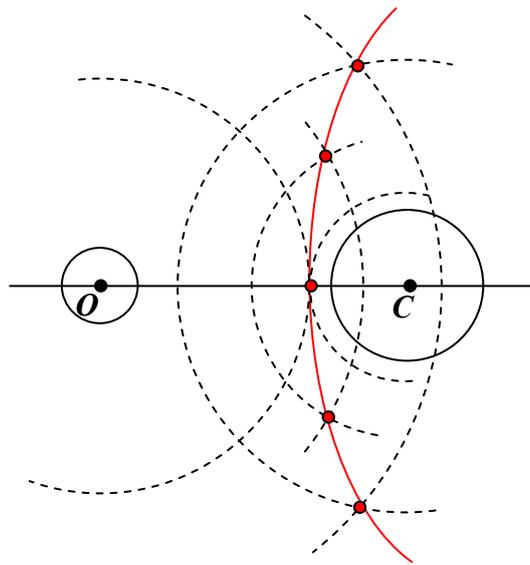


Рис. 25

Мы рассмотрели построение кривых для случая, когда исходные окружности не пересекают друг друга. В том случае, когда одна окружность целиком содержит другую, как мы уже видели, кривые центров являются эллипсами. Покажем построение эллипса для уравнения (7).

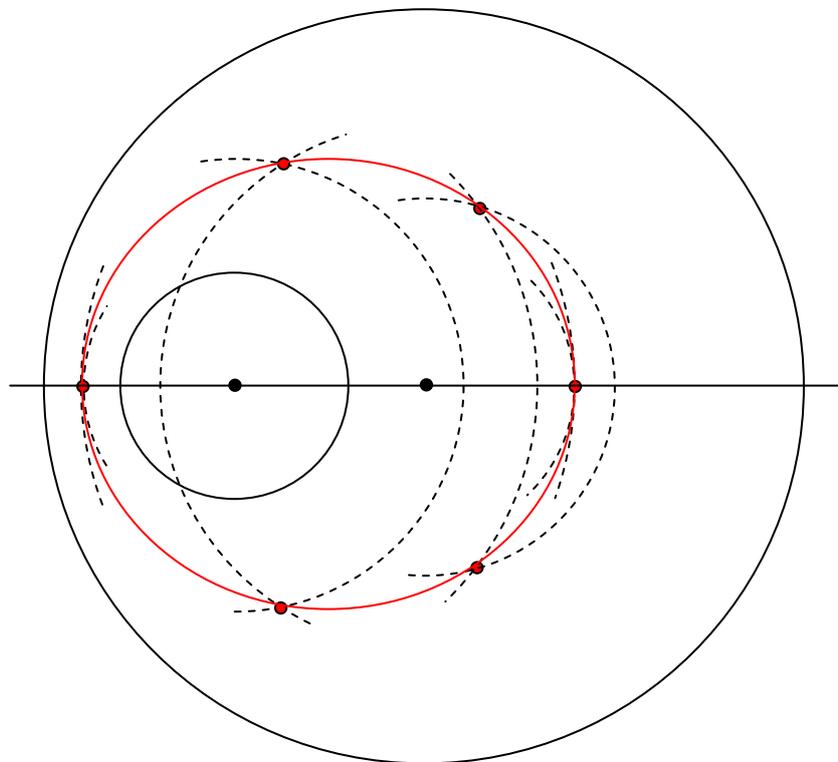


Рис. 26

В этом случае будем иметь такую рабочую формулу:  $\rho_2 = (R+r) - \rho_1$ . При  $\rho_1 = \frac{R+r-n}{2}$  получаем левую крайнюю точку эллипса, а при  $\rho_1 = \frac{R+r+n}{2}$  - правую.

В следующем примере рассмотрим построение по точкам одной из найденных парабол. Будем исходить из уравнения (11). Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$y^2 = 2(R+n)x + R^2 - n^2 = 2Rx + 2nx + R^2 - n^2 + x^2 - x^2 = (R+x)^2 - (n-x)^2,$$

$$\sqrt{(n-x)^2 + y^2} = x + R. \quad (19)$$

Вводя обозначение для фокального радиуса, получаем рабочую формулу:  $\rho_2 = x + R$ . Т. о. парабола, задаваемая уравнением (11), строится по точкам, которые являются пересечением прямых  $x$  и соответствующих окружностей радиусов  $\rho_2$ .

Очевидно, что  $x \geq \frac{n-R}{2}$ .

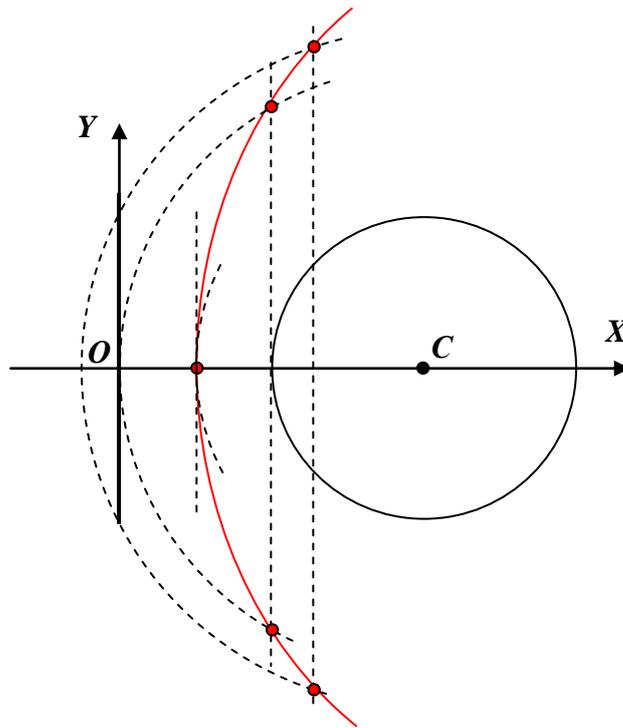


Рис. 27

Теперь поговорим о знаменитой задаче Аполлония. Напомним. Даны три окружности надо построить окружность, касающуюся три данных окружности. Задача давно решена. Нас она заинтересовала потому, что она тоже связана с коническими сечениями.

В структуре теории мы использовали понятие связки окружностей. Речь шла о простейшей связке двух окружностей. Вообще число окружностей в связке может быть любым. Связка для задачи Аполлония имеет три окружности.

Рассматривая окружности  $S_i$  в задаче Аполлония очевидно можно сказать, что каждой паре данной связки соответствует некоторая кривая центров  $\Gamma_{ij}$ . А т. к.

решение задачи Аполлония единственно, то все три кривые  $\Gamma_{ij}$  будут пересекаться в одной точке  $A$  – центре окружности, являющейся решением задачи Аполлония.

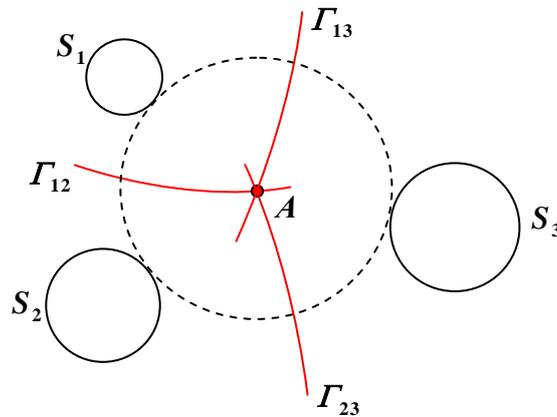


Рис. 28

Окружностям  $S_i$  и  $S_j$  соответствует кривая  $\Gamma_{ij}$ . Помним, что это гипербола в рамках ТКЦ (то есть одна ветвь от соответствующей гиперболы в ТКС).

Мы покажем несколько характерных решений задачи Аполлония, когда исходные окружности не пересекают друг друга.

Обычно говорят о восьми случаях решений [9]. На Рис. 28 показан случай, когда искомая окружность касается трёх данных снаружи.

Существует и единственный случай, когда искомая окружность касается данные окружности внутренней стороной (Рис. 29). Для ТКЦ это уже другой тип касания окружностей. И мы получаем здесь другой тип кривой, но тоже гиперболы. Если для первого типа касания окружностей характерным является загибание гиперболы в сторону той окружности, чей радиус меньше, то для второго типа касания – наоборот. Загибание кривой происходит в сторону окружности с большим радиусом.

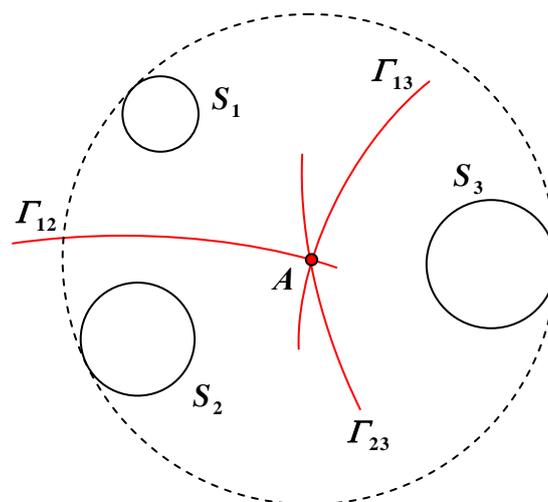


Рис. 29

Кроме того существует шесть решений, где две из данных окружностей находятся либо внутри, построенной окружности, либо снаружи (три случая внутри и три – снаружи). Покажем по одному такому решению.

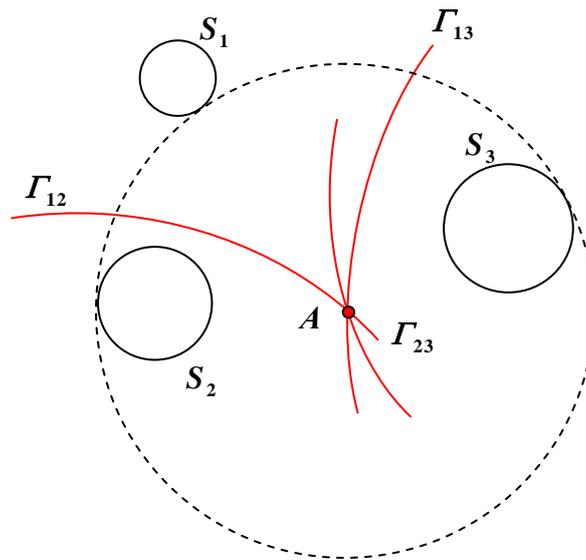


Рис. 30

На Рис. 30 две окружности  $S_2$  и  $S_3$ , которые находятся внутри окружности с центром в точке  $A$ , а одна снаружи. На Рис. 31 – наоборот, окружности  $S_1$  и  $S_3$  остались снаружи, а окружность  $S_2$  внутри.

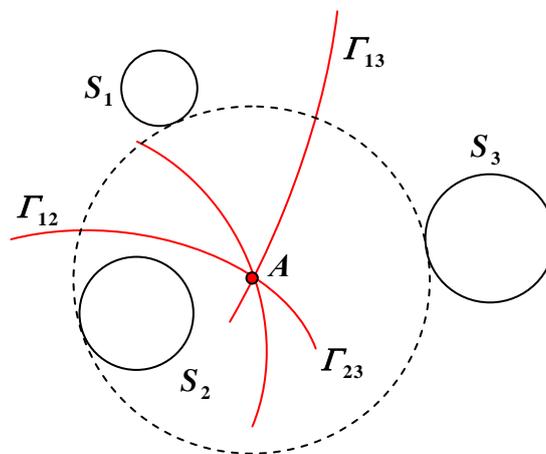


Рис. 31

Но существуют ещё более интересные случаи решений задачи Аполлония, когда две из исходных окружностей находятся внутри третьей исходной. В этой ситуации мы имеем ещё восемь решений. Почему-то эти решения не так широко известны широкой публике. Все эти решения можно объединить парами по типу касания окружностей между собой. Мы покажем все типы решений.

Итак даны три окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Окружности  $S_2$  и  $S_3$  (показаны голубым цветом) расположены внутри окружности  $S_1$  (Рис. 32).

Задача та же – построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей. Нас по-прежнему будет интересовать не построение решения, а факт его существования.

Мы сказали, что разделим все решения по типу касаний окружности решения к двум данным (третью данную окружность, очевидно, окружность решения может касаться только изнутри). Все типы касаний показаны на Рис. 1.

Первым типом касания будем считать случай, когда окружность решения касается двух данных (голубых) внешним образом. Не трудно сообразить, что таких решений будет два, как мы и говорили.

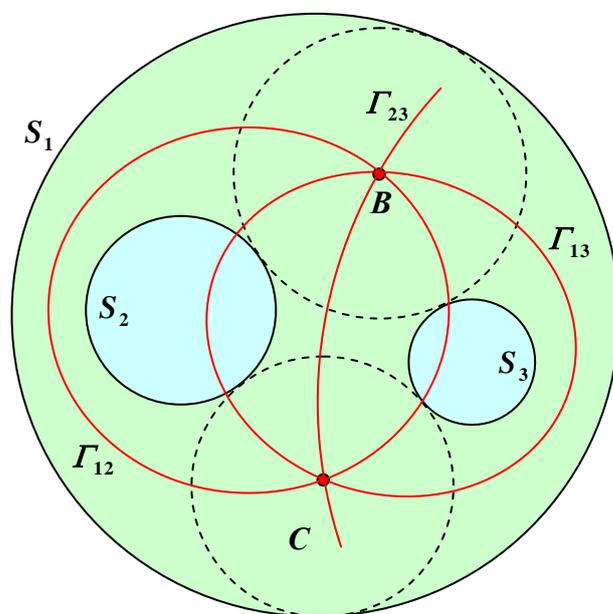


Рис. 32

Окружность  $S_2$  полностью лежит внутри окружности  $S_1$ , поэтому их кривая центров будет эллипс первого типа. Напомним, что такой эллипс – это кривая, которая является геометрическим местом точек, которые в свою очередь являются центрами, касающихся окружностей к  $S_2$  и  $S_1$  внешним образом. Немного длинновато, но внимательно вчитайтесь в это предложение. Примером таких окружностей будут окружности с центрами в точках  $B$  и  $C$ . Кроме того последние окружности ещё касаются и окружность  $S_3$ , поэтому их центры и принадлежат эллипсу  $\Gamma_{12}$ .

Окружности  $S_1$  и  $S_3$  тоже определяют эллипс такого же типа  $\Gamma_{13}$ , поэтому он тоже должен проходить через точки  $B$  и  $C$ . Кроме того, окружности  $S_2$  и  $S_3$  определяют гиперболу первого типа, которая должна тоже пройти через точки  $B$  и  $C$ . Что мы и видим на Рис. 32. Т. о., окружности с центрами в точках  $B$  и  $C$  – это первые два решения в задаче Аполлония для данной ситуации.

На рисунке 33 показаны решения второго типа, когда искомые окружности касаются окружностей  $S_2$  и  $S_3$  изнутри. Здесь мы видим и эллипсы и гиперболу второго типа.

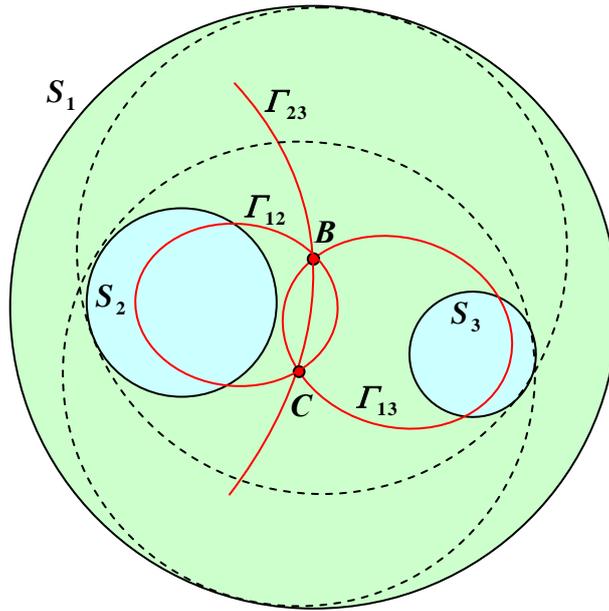


Рис. 33

На рисунке 34 мы видим смешанные решения, когда окружности касаются окружность  $S_2$  внешним образом, окружность  $S_3$  изнутри (Рис. 34 слева). А справа – наоборот. Поэтому здесь и эллипсы смешанного типа. А гиперболы третьего и четвёртого типов.

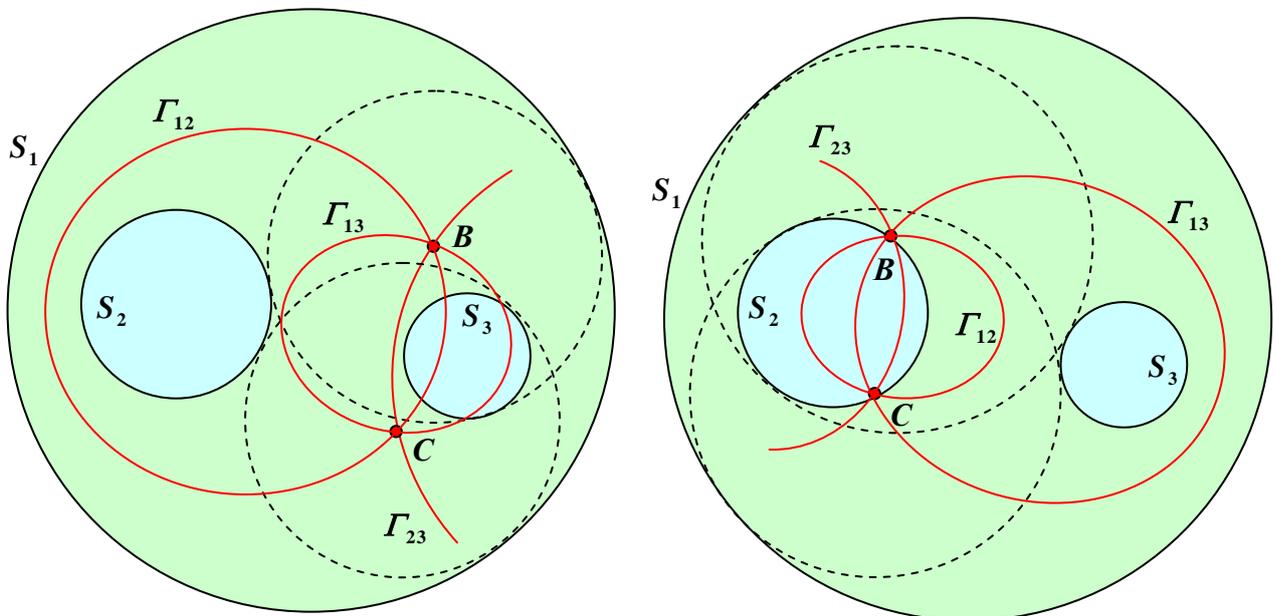


Рис. 34

Отметим, что разобраться в последних восьми решениях задачи Аполлония без ТКЦ было бы не просто. Так или иначе, но эта теория всё равно должна была бы себя проявить.

Мы не будем здесь рассматривать тему инверсионных преобразований [9] или полярных преобразований [11], связанных с коническими сечениями (эти темы интересны сами по себе), а поговорим собственно о цели нашей статьи. Всё, что было сказано до этого в общем-то можно назвать предисловием. Далее мы будем говорить о поверхностях второго порядка (ПВП) и поэтому хотелось сначала рассмотреть становление взгляда на кривые второго порядка, чтобы, отталкиваясь от них, аналогично строить теорию ПВП.

Как сегодня наука определяет ПВП. Заглянем в энциклопедический словарь по математике. Что такое поверхность. Поверхность «определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям» [12]. Наприме, поверхность шара – множество точек, отстоящих на заданном расстоянии от данной точки. И далее здесь же поверхность второго порядка определяется, как множество точек, которое удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^3 a_{i4} x_i + a_{44} = 0, \quad (20)$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i \neq j$ .

Аналитическая теория ПВП давно и прекрасно разработана и мы не собираемся её здесь обсуждать.

Но вернёмся не надолго к кривым второго порядка и покажем несложный математический формализм для ТКС и ТКЦ.

В рамках ТКС мы имеем конус  $K^2$  и плоскость  $\pi$  (в общем случае  $R^2$ ). Будем обозначать кривые второго порядка через  $F^1$ . Тогда можем определить кривые второго порядка в общем виде выражением (20).

$$F^1 \equiv K^2 \cap \pi. \quad (21)$$

В рамках ТКЦ мы имеем две окружности  $A^1(O, r)$  и  $B^1(C, R)$ , а  $F^1$  определяем как геометрическое место точек, равноудалённых от этих окружностей, что можно записать выражением:

$$F^1: \{M(x, y) / \rho(A^1 M) = \rho(B^1 M)\}, \quad (22)$$

где  $\rho(A^1 M)$  - расстояние текущей точки  $M$  кривой  $F^1$  от окружности  $A^1(O, r)$ .

Теперь попробуем этот формализм распространить на случай ПВП. Через  $F^2$  будем обозначать ПВП. Тогда, по аналогии с ТКС можем записать:

$$F^2 \equiv K^3 \cap R^2. \quad (23)$$

Но так ли это на самом деле. Если в ТКС мы во многом руководствовались наглядными соображениями, то здесь этот подход не годится. Никто не в силах представить себе, как выглядит  $K^3$ . Нам это просто не дано. Конечно, можно использовать аналитические методы многомерной геометрии, но это целое исследование. Т. е. выражение (23) сегодня никто не использует в качестве определения ПВП. Да и звучало бы как-то уж слишком абстрактно. Мол где-то в четырёхмерном пространстве есть трёхмерный конус, который при пересечении с нашим трёхмерным пространством в сечении даёт поверхности второго порядка.

Рассмотрим второй подход, аналогичный ТКЦ. Выражение

$$F^2 : \{M(x, y, z) / \rho(A^2 M) = \rho(B^2 M)\}. \quad (24)$$

описывает поверхности второго порядка. Здесь  $\rho(A^2 M)$  - расстояние от текущей точки  $M$  поверхности до сферы  $A^2(O, r)$ . Т. е. переход от ТКЦ на плоскости очень естественно выглядит и для теории поверхностей центров в пространстве. Т. о. ПВП можно определять, как *геометрическое место точек, равноудалённых от двух заданных сфер*. При этом тип поверхности будет определяться типом касания сфер. По аналогии с ТКЦ таких типов тоже четыре.

Как пример, рассмотрим вывод уравнения поверхности второго порядка первого типа (т. е. сферы касаются данные сферы внешним образом).

Введём фокальные координаты таким образом, чтобы центры данных сфер принадлежали оси  $OX$ . (это всегда можно сделать).

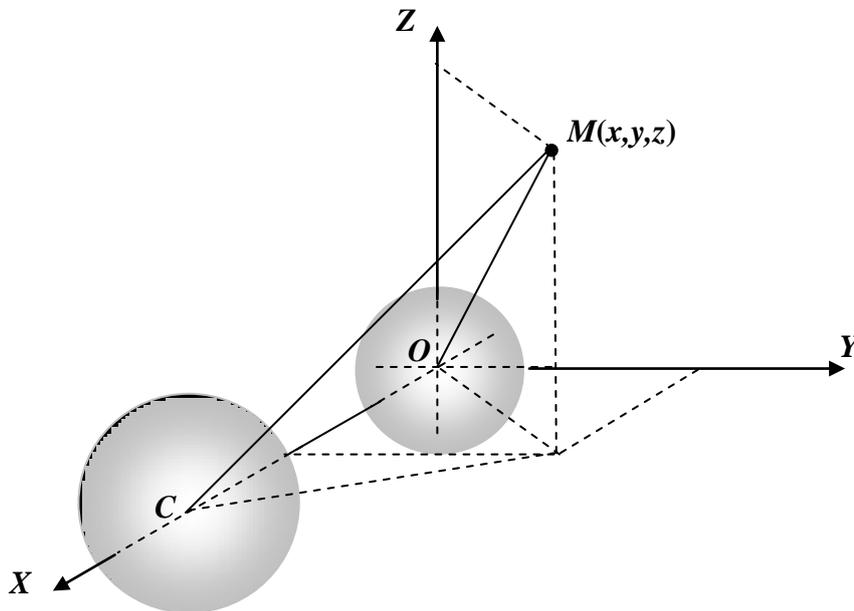


Рис. 35

Итак, дано: две сферы  $A^2(O, r)$  и  $B^2(C, R)$ , где  $OC = n$ . Точка  $M$  – текущая точка поверхности, равноудалённая от данных сфер, т. е., в свою очередь, является центром некоторой сферы.

В соответствии с Рис. 35 можем записать:  $CM = \sqrt{(n-x)^2 + y^2 + z^2}$  и  $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Тогда по условию задачи:  $OM - r = CM - R$ . Раскрывая последнее выражение и приводя подобные получаем уравнение поверхности.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left[ \frac{n^2 - 2nx - (R-r)^2}{2(R-r)} \right]^2. \quad (25)$$

Рассмотрим частный случай, когда плоскость  $YOZ$  пересекает полученную поверхность. Вводя обозначение для фокального радиуса  $p = \frac{b^2}{a}$  получаем в сечении

уравнение  $y^2 + z^2 = p^2$ . Не трудно понять, что это уравнение окружности. А подставляя в (25) значение  $x = c - a$  будем иметь:  $y^2 + z^2 = 0$ , плоскость  $x = c - a$  будет касательной к поверхности (25). Т. о., уравнение (25) описывает поверхность гиперboloида в фокальных координатах.

Покажем примеры тел вращения, которые естественным образом возникают в фокальных координатах. Отгалкиваясь от Рис. 23 получаем такие тела вращения.

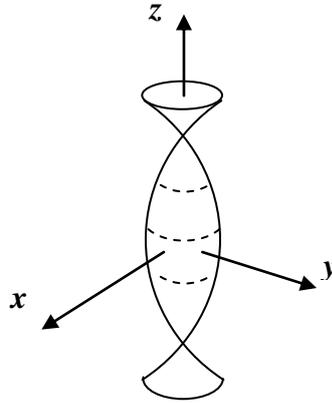


Рис. 36

Такую фигуру можно было бы назвать например, гиперболическим веретеном. При  $-\frac{b^2}{a} \leq z \leq +\frac{b^2}{a}$  получаем фокальное веретено.

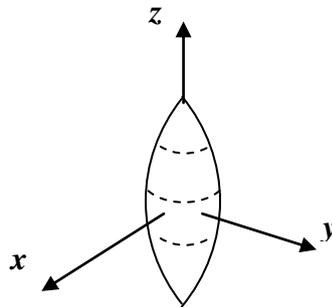


Рис. 37

А при  $z < \pm \frac{b^2}{a}$  будем иметь гиперболическую бочку.

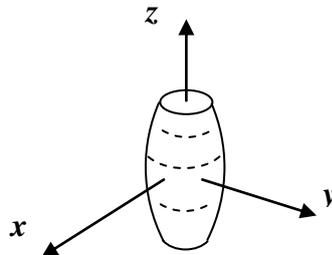


Рис. 38

А Рис. 10 наводит на мысль о фигуре, напоминающей стилизованный дубовый жёлудь.

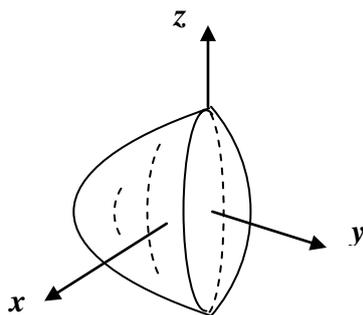


Рис. 39

Возможно, интересно будет найти объём или поверхность таких фигур вращения, но мы этим заниматься не будем, а оставляем эти вопросы для любознательных читателей.

В заключение поговорим немного об естествознании. Встречаются ли кривые второго порядка и, в частности, конические сечения в естественных науках. Для этого заглянем в учебники, справочники и энциклопедии.

Конечно же встречаются, но вот термин «коническое сечение» здесь вообще не употребляется – он не нужен. Просто есть гипербола, эллипс и парабола. Например, интерференция волн от двух точечных источников имеет картину в виде гипербол [18]. Также известны акустические зеркала и линзы параболического гиперболического и эллиптического типа [18]. А уж в рамках специальной теории относительности имеем сплош и рядом различные гиперболические образы, например, гиперболическое движение [19].

В микромире популярна формула  $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ , которая легко приводится к виду  $\frac{E^2}{m^2 c^4} - \frac{p^2}{m^2 c^2} = 1$ , в которой легко узнаётся гипербола.

Всем известно, что брошенное тело при падении имеет траекторию параболы. А может быть и поверхность яйца надо рассматривать как тело вращения вроде того, что мы показали на Рис. 39.

Особо поговорим об астрономии. Здесь мы встречаемся с тремя типами орбит, которые из параболических, при определённых условиях, могут превращаться в гиперболические и эллиптические и наоборот.

А теперь на секунду представим себе, что теория касательных сфер каким-то образом реализуется в физическом мире. Главная сила, которая господствует в космосе – это гравитация. Известно, что фронт гравитационного распространения является сферическим [13]. Также помним, что два тела с массами  $M_1$  и  $M_2$  связаны законом

Ньютона:  $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$ . Можем предположить, что радиус гравитационной волны

пропорционально связан с массой тела, т. е.  $\frac{M_1}{R_1} = \frac{M_2}{R_2} = \chi$ , где некоторое

гравитационное квантовое число. Откуда получаем:

$$M_1 M_2 = \chi^2 R_1 R_2. \quad (26)$$

Это не противоречит физической науке. Сами физики иногда используют так называемую «естественную» систему единиц, в которой время, расстояние и масса (или энергия) имеют одинаковую размерность [13]. Тогда из закона Ньютона и формулы (26) можем записать:

$$R_1 R_2 = Fr^2 \frac{1}{G\chi^2}. \quad (27)$$

Переходя к обозначениям теории касательных сфер формулу (27) можем переписать в соответствующем виде:

$$r \cdot R = Fn^2 \frac{1}{G\chi^2}. \quad (28)$$

Здесь вместо  $r^2$  в (27) пишем  $n^2$  ( $n$  – межфокусное расстояние) в (28), а вместо  $R_1$  в (27) записываем  $r$  в (28) и вместо  $R_2 - R$  соответственно. Кроме того нам известно, что  $r + R = 2a$  (или  $R - r = 2a$ ).

На основании вышеизложенного получаем характеристические уравнения гравитационной теории сфер:

$$(R^*)^2 \pm 2aR^* \mp \frac{Fn^2}{G\chi^2} = 0. \quad (30)$$

Подставляя в характеристическое уравнение (30) различные числа  $\chi$  находим  $r$  и  $R$ , которые, в свою очередь, определяют некоторую поверхность второго порядка  $F^2$ . Если теперь в этой системе рассмотреть пробное тело с массой  $M_0$ , то мы получим плоскость, определяемую телами с массами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_0$ . Эта плоскость, пересекая поверхность  $F^2$ , даст кривую второго порядка, по сути – некоторую орбиту.

А можно решать и обратную задачу. По существующей орбите исследовать какие массы её иницируют.

Так может быть есть смысл в практической астрономии поискать следы теории касательных сфер?

## Литература

1. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия, часть 1», М., «Просвещение», 1986
2. А. А. Гусак, Г. М. Гусак, «Линии и поверхности», Минск, «Высшая школа», 1985
3. В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович, «Основные математические формулы», Минск, «Высшая школа», 1980
4. П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», М., «НАУКА», 1968
5. А. В. Погорелов, «Геометрия», М., «НАУКА», 1983

6. Б. А. Розенфельд, «Аполлоний Пергский», М., «МЦНМО», 2004
7. Н. И. Мусхелишвили, «Курс аналитической геометрии», М., «Высшая школа», 1967
8. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990
9. П. С. Моденов, «Задачи по геометрии», М., «НАУКА», 1979
10. И. А. Климишин, «Астрономия наших дней», М., «НАУКА», 1976
11. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер, «Новые встречи с геометрией», М., «НАУКА», 1978
12. «Математический энциклопедический словарь», М., «Советская энциклопедия», 1988
13. Д. Лейзер, «Создавая картину Вселенной», М., «Мир», 1988
14. П. И. Бакулин, Э. В. Кононович, В. И. Мороз, «Курс общей астрономии», М., «НАУКА», 1968
15. Р. Е. Пайерлс, «Законы природы», М., «Издательство физ-мат. литературы», 1962
16. Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев, «Справочник по физике», М., «ОНИКС», 2006
17. Физическая энциклопедия Т. 1, М., «Советская энциклопедия»
18. Физическая энциклопедия Т. 2, М., «Советская энциклопедия»
19. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, «Гравитация, Т. 1», М., «Мир», 1977