Франц Герман

Инвертированный репер

(franz.h-n@yandex.ru)

Известно [7], что вещественная проективная плоскость – это неориентированная (односторонняя) поверхность. Говорить о выворачивании такой поверхности наизнанку нет смысла. Попробуйте вывернуть наизнанку, например, лист Мёбиуса. Но мы попробуем посмотреть на этот вопрос с аналитической точки зрения.

Рассмотрим произвольный четырёхвершинник $A_1A_2A_3A_4$ на проективной плоскости (Рис.1).

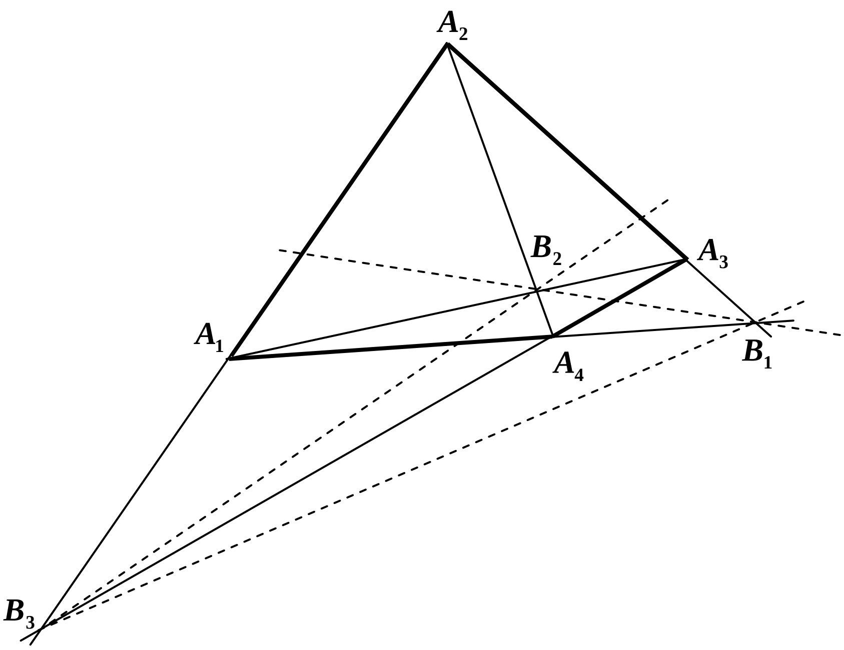

Рис. 1

Традиционно определим координатный репер R: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $A_4(1:1:1)$. Теперь вычислим координаты точек B_i. Точка $B_1 \equiv A_1A_4 \cap A_2A_3$. Прямая A_1A_4 имеет уравнение: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_3 - x_2 = 0$. Уравнение прямой A_2A_3 : $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 = 0$. Решая систему уравнений: $\begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$, находим координаты точки $B_1(0:1:1)$. Аналогично находим координаты точек $B_2(1:0:1)$ и $B_3(1:1:0)$. Заметим, что координаты точек A_i и B_i инвертированы относительно друг друга. Отсюда и вводится понятие инвертированного репера. Репер R^*: $\{B_1, B_2, B_3, A_4\}$ будем называть ***инвертированным репером*** (вывернутым «наизнанку») по отношению к реперу R.

Найдём преобразование плоскости, которое переводит точки репера R в точки репера R^*.

Пусть наше преобразование задаётся матрицей $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{11} & \boldsymbol{m}_{12} & \boldsymbol{m}_{13} \\ \boldsymbol{m}_{21} & \boldsymbol{m}_{22} & \boldsymbol{m}_{23} \\ \boldsymbol{m}_{31} & \boldsymbol{m}_{32} & \boldsymbol{m}_{33} \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{A}_j$.

Преобразование $\boldsymbol{M}$ будем называть преобразованием *координатного инвертирования* или ***К* – *инверсией*** (не путать с инверсией на евклидовой плоскости). Очевидно, что такое преобразование не однозначно. В общем случае таких преобразований может быть 6, в зависимости от того, какая точка одного репера преобразуется в какую точку другого репера. Сначала рассмотрим преобразования для $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$, т. е. $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{A}_i$.

Вычислим элементы преобразования $\boldsymbol{M}_1$.

Развернём уравнения $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{A}_i$. Получим три системы уравнений с девятью неизвестными $\boldsymbol{m}_{ij}$. Из уравнения $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1$ получаем систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}_{11} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{m}_{12} \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{m}_{13} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m}_{21} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{m}_{22} \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{m}_{23} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{m}_{31} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{m}_{32} \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{m}_{33} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{1} \end{cases}.$$

Откуда получаем: $\boldsymbol{m}_{11} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{m}_{21} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}_{31} = \mathbf{1}$.

Аналогично находим и остальные элементы преобразования $\boldsymbol{M}_1$: $\boldsymbol{m}_{12} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}_{13} = \mathbf{1}$, , $\boldsymbol{m}_{22} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{m}_{23} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}_{32} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}_{33} = \mathbf{0}$, т. е. $\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Покажем остальные пять преобразований $\boldsymbol{M}_i$.

Для преобразования $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{B}_3$, $\boldsymbol{A}_3 \to \boldsymbol{B}_2$ получаем матрицу: $\boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Матрица $\boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ соответствует преобразованию: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_3 \to \boldsymbol{B}_3$.

$\boldsymbol{M}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ соответствует преобразованию: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{B}_3$, $\boldsymbol{A}_3 \to \boldsymbol{B}_1$.

$\boldsymbol{M}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ соответствует преобразованию: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_3$, $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_3 \to \boldsymbol{B}_2$.

И последнее преобразование $\boldsymbol{M_6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ переводит: $\boldsymbol{A_1 \to B_3}$, $\boldsymbol{A_2 \to B_2}$, $\boldsymbol{A_3 \to B_1}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только преобразование $\boldsymbol{M_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, т. к. исследования остальных преобразований $\boldsymbol{M_i}$ строятся аналогично.

Рассмотрим реперные треугольники $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$ и $\boldsymbol{B_1B_2B_3}$ (Рис. 2). Как видим, эти треугольники имеют центр перспективы в точке $\boldsymbol{A_4}$. Рассмотрим в какую точку $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3)}$ преобразуется точка $\boldsymbol{A_4}$. Т. е. решим систему уравнений $\boldsymbol{x_i = M_1 \cdot a_i}$, где $\boldsymbol{a_i}$ - координаты точки $\boldsymbol{A_4}$. Как оказалось, точка $\boldsymbol{A_4}$ при данном преобразовании переходит в саму себя, т. е. остаётся неподвижной. Напомним, что в проективной геометрии однородные координаты точки определяются с точностью до постоянного множителя $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{X(x_1 : x_2 : x_3) \equiv X^*(px_1 : px_2 : px_3)}$, т. е. точки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X^*}$ - тождественны (одна и та же точка).

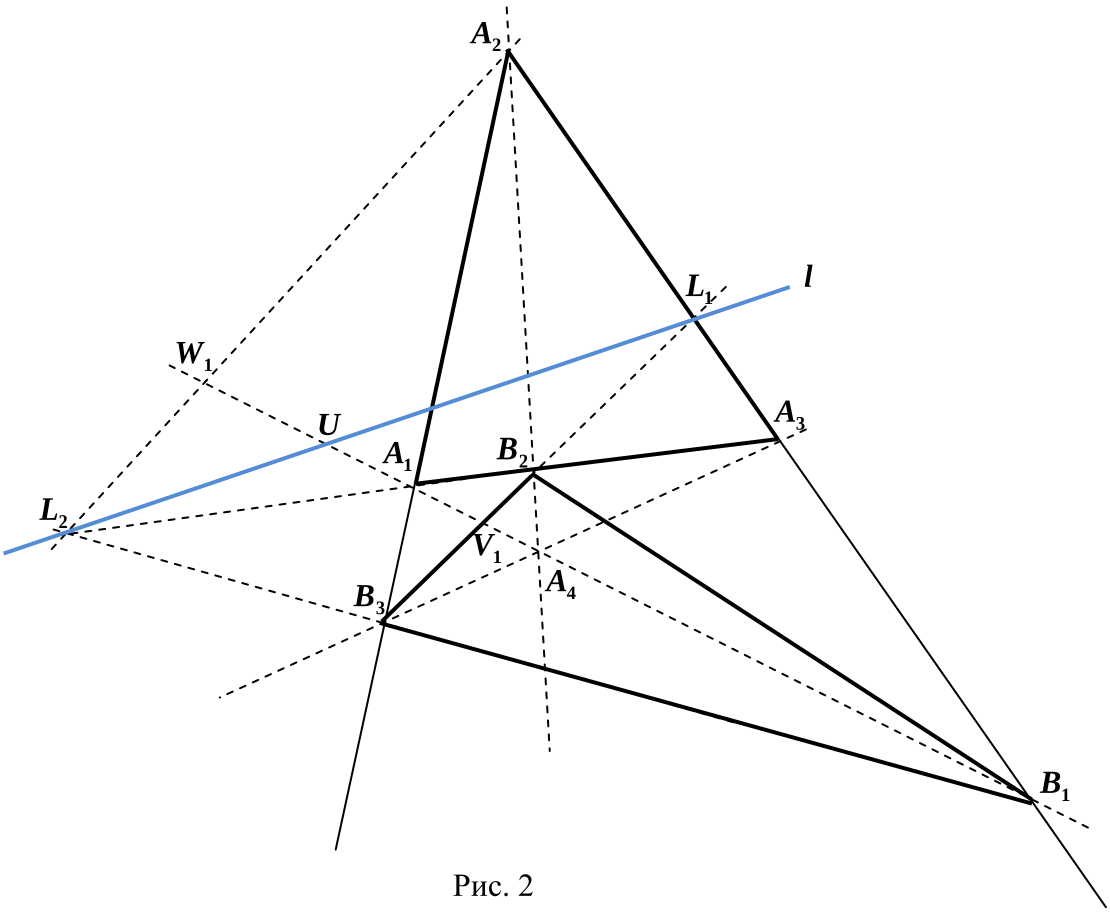

Рис. 2

Рассмотрим в общем виде вопрос о неподвижных точках преобразования $\boldsymbol{M}_1$. Обозначим через $\boldsymbol{X}(x_1 : x_2 : x_3)$ неподвижные точки. Тогда имеем такую систему уравнений: $\boldsymbol{p}x_i = \boldsymbol{M}_1 \cdot x_i$. Или $\boldsymbol{M}_1 \cdot (1-\boldsymbol{p}) \cdot x_i = 0$. Развернём данное уравнение:

$$(1-p)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

В результате получаем: $(1-p)\cdot(x_i + x_j) = 0$, где p – произвольный множитель. В общем виде решение можем записать:

$$\begin{cases} (x_i + x_j) = 0 \\ x_k = 0 \end{cases}, \quad i \neq j \neq k \qquad (1)$$

Покажем примеры неподвижных точек.

Точка $L_1 \equiv A_2A_3 \cap B_2B_3$. Уравнение прямой A_2A_3 имеет вид: $x_1 = 0$. Уравнение прямой B_2B_3: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_2 + x_3 - x_1 = 0$. Из решения этих уравнений находим координаты точки $L_1(0:1:-1)$. Не трудно убедиться, что координаты этой точки удовлетворяют системе (1) для неподвижных точек. Координаты точки $L_2 \equiv A_1A_3 \cap B_1B_3$ находятся аналогично $L_2(1:0:-1)$.

По теореме Дезарга точки L_i лежат на одной прямой. С другой стороны точки $L_i \equiv A_jA_k \cap B_jB_k$ определяют неподвижные точки пересечения прямых образа и прообраза преобразования $\boldsymbol{M}_1$. Т. о., прямая $l \equiv L_1L_2$ будет являться осью перспективы для центра перспективы в точке A_4. Т. е. $\boldsymbol{M}_1$ - является перспективным преобразованием плоскости.

Докажем линейность преобразования $\boldsymbol{M}_1$. Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку A_4. Возьмём три точки на этой прямой. Не нарушая общности, можем взять точки: A_1, A_4 и некоторую точку $X(1:m:n)$. Т. к. эти точки лежат на одной прямой, то $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & n \end{vmatrix} = n - m = 0$, т. е. $m = n$. После преобразования точка A_1 перейдёт в точку B_1. Точка A_4 останется на месте. А точка X перейдёт в некоторую точку $Y \equiv \boldsymbol{M}_1 \cdot X$. Из последнего тождества определяем координаты точки Y.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n \end{pmatrix}$$

Т. о. получаем: $\boldsymbol{Y}(2n:1+n:1+n)$. Вычислим определитель, составленный из точек $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_4$, $\boldsymbol{Y}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2n & 1+n & 1+n \end{vmatrix} = 2n+1+n-2n-1-n=0$$

А т. к. определитель равен нулю, то, полученные точки - лежат на одной прямой.

Теперь выясним как преобразуется прямая, не проходящая через точку $\boldsymbol{A}_4$. Не нарушая общности можно выбрать три точки на произвольной прямой. Это могут быть точки $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{X}(1:n:0)$. Очевидно, что эти точки лежат на одной прямой. После преобразования, выбранные точки перейдут в точки: $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ и $\boldsymbol{Y}(n:1:1+n)$. Не трудно убедиться, что новые точки тоже лежат на одной прямой. Т. о., мы убедились, что преобразование $\boldsymbol{M}_1$ является линейным. Так же не трудно убедиться в том, что точки образа и прообраза всегда лежат на прямой, проходящей через центр перспективы. Для этого достаточно вычислить определитель, составленный из координат точек $\boldsymbol{X}(1:n:0)$, $\boldsymbol{Y}(n:1:1+n)$ и $\boldsymbol{A}_4$.

Наконец, убедимся, что точки пересечения прямых образа и прообраза принадлежат оси перспективы, т. е. прямой $\boldsymbol{l}$.

Определим уравнение прямой $\boldsymbol{l}$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1+x_2+x_3=0.$$

Уравнение прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$: $x_3=0$ (одна из прямых взятого координатного репера). Уравнение прямой $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1+x_2-x_3=0$. Решая систему из двух последних уравнений $\begin{cases} x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$, находим точку пересечения: $\boldsymbol{N}(1:-1:0)$. Прямая подстановка координат этой точки в уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, убеждает нас, что $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{l}$. Т. е., как мы и говорили ранее, такое преобразование, задаваемое оператором $\boldsymbol{M}_1$, называется перспективным.

Кроме этого убедимся, что преобразование $\boldsymbol{M}_1$ является и проективным преобразованием. По определению проективного преобразования его единственным инвариантом должно быть сложное отношение четырёх точек на прямой. Покажем это.

Сложное отношение четырёх точек $(\boldsymbol{ABCD})$ на прямой (Рис. 3) можно вычислять различными способами. Мы будем использовать координатный способ.

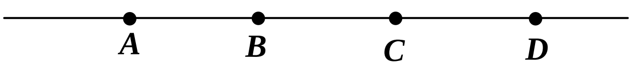

Рис. 3

Для вычисления сложного отношения должны быть использованы две из трёх координаты, взятых четырёх точек:

$$\left(\boldsymbol{ABCD}\right)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & d_1\\ a_2 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}} \qquad (2)$$

В формуле (2) показано применение первой и второй координат точек.

Пример. Воспользуемся Рис. 2. Точки $L_2(1:0:-1)$, $A_1(1:0:0)$, $B_2(1:0:1)$, $A_3(0:0:1)$ лежат на одной прямой и координаты их известны. Вычислим сложное отношение этих точек. Заметим, что вторая координата у всех точек равна нулю, поэтому удобнее будет воспользоваться первой и третьей координатами.

$$\left(L_2A_1B_2A_3\right)=\frac{\begin{vmatrix}l_{21} & a_{11}\\ l_{23} & a_{13}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{21} & a_{31}\\ b_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}l_{21} & a_{31}\\ l_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{21} & a_{11}\\ b_{23} & a_{13}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=-1\,.$$

Кстати заметим, что сложное отношение четырёх точек называется гармоническим, если оно равно **-1**.

Теперь вычислим сложное отношение четырёх точек образа и прообраза. Для этого снова воспользуемся Рис. 2. Возьмём четыре точки $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $B_3(1:1:0)$и $X(1:n:0)$, лежащие на одной прямой. Как расположены эти точки относительно друг друга мы не знаем. Важно, чтобы точки после преобразования были расположены относительно друг друга точно также, как и точки прообразов. Помним, что точки образа и прообраза связаны прямой, проходящей через центр перспективы. Можем построить такую схему расположения точек (Рис. 4):

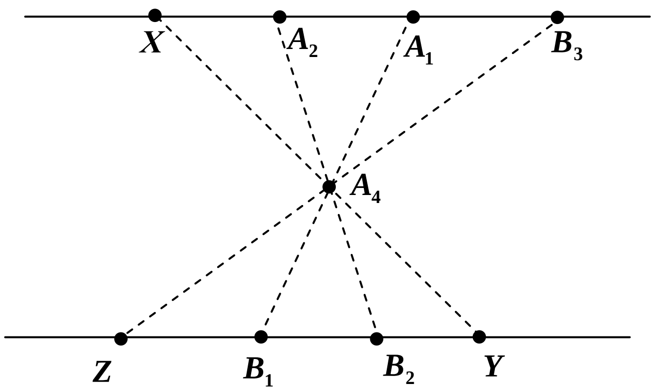

Рис. 4

Вычислим координаты точки Z. Это можно сделать по разному. Вычислить, как точку пересечения прямых $Z\equiv B_1B_2\cap A_4B_3$ или, как образ точки $B_3\xrightarrow{M_1}Z$. Имеем: $Z(1:1:2)$. Координаты остальных точек нам уже известны. Теперь вычисляем сложное отношение.

$$\left(XA_2A_1B_3\right)=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\n&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\n&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{1-n}, \qquad \left(ZB_1B_2Y\right)=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&n\\0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&n\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{1-n}.$$

Т. о, мы показали, что преобразование M_1 также является и проективным преобразованием.

Рассмотрим последовательности точек на прямой A_1B_1: $B_1 \xrightarrow{M_1} V_1 \xrightarrow{M_1} V_2 \xrightarrow{M_1} \cdots \xrightarrow{M_1} V_n$ и $A_1 \xleftarrow{M_1} W_1 \xleftarrow{M_1} W_2 \xleftarrow{M_1} \cdots \xleftarrow{M_1} W_n$ (Рис. 2).

Определим координаты точки V_1.

$$\begin{cases} v_1 = m_{11}\cdot b_1 + m_{12}\cdot b_2 + m_{13}\cdot b_3 \\ v_2 = m_{21}\cdot b_1 + m_{22}\cdot b_2 + m_{23}\cdot b_3 \\ v_3 = m_{31}\cdot b_1 + m_{32}\cdot b_2 + m_{33}\cdot b_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v_1 = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 \\ v_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1 \\ v_3 = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1 \end{cases}.$$

Получаем точку $V_1(2:1:1)$.

Определим координаты точки $W_1(w_1 : w_2 : w_3)$, которая переходит при преобразовании M_1 в точку исходного репера $A_1(a_1 : a_2 : a_3)$. Для этого необходимо решить систему уравнений $A_1 = M_1 \cdot W_1$. Получаем точку: $W_1(-1:1:1)$. Продолжая вычисления, находим следующие точки: $V_2(2:3:3)$, $V_3(6:5:5)$, $V_4(10:11:11)$, $V_5(22:21:21)$, $V_6(42:43:43)$ и т. д., и точки $W_2(-3:1:1)$, $W_3(-5:3:3)$, $W_4(-11:5:5)$, $W_5(-21:11:11)$, $W_6(-43:21:21)$ и т. д..

Можно представить полученные результаты в таком табличном виде:

$W_6(-43:21:21)$	$W_6(-43:21:21)$
$W_5(-21:11:11)$	$W_5(-21:11:11)$
$W_4(-11:5:5)$	$W_4(-11:5:5)$
$W_3(-5:3:3)$	$W_3(-5:3:3)$
$W_2(-3:1:1)$	$W_2(-3:1:1)$
$W_1(-1:1:1)$	$W_1(-1:1:1)$
$A_1(1:0:0)$	$W_0 \equiv U_0(1:0:0) \equiv A_1$
$B_1(0:1:1)$	$U_1(0:1:1) \equiv B_1$
$V_1(2:1:1)$	$U_2(2:1:1) \equiv V_1$
$V_2(2:3:3)$	$U_3(2:3:3) \equiv V_2$
$V_3(6:5:5)$	$U_4(6:5:5) \equiv V_3$
$V_4(10:11:11)$	$U_5(10:11:11) \equiv V_4$
$V_5(22:21:21)$	$U_6(22:21:21) \equiv V_5$

и т. д.. Второй столбец подчёркивает координатное соответствие между точками U_n и W_n. Замечаем, что $x_2 = x_3$ для всех найденных точек. Более того, значения координат являются значениями числового ряда: **0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43**, ... Возникает задача, определить общую формулу, показанного ряда.

Обозначим общий член этого ряда через $T(n)$, где $n = \{0, 1, \cdots, \infty\}$. Т. е. $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 1$, $T(3) = 3$ и т. д.. Справедливы рекурентные формулы:

$$T(n+1) = 2T(n) + (-1)^n, \tag{3}$$

$$T(n+1) = 2^n - T(n). \tag{4}$$

Решая систему уравнениний

$$\begin{cases} T(n+1) = 2T(n) + (-1)^n \\ T(n+1) = 2^n - T(n) \end{cases},$$

находим формулу общего члена, исследуемого ряда:

$$T(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{5}$$

Теперь можем в общем виде представить точки W_n и U_n:

$$W_n(-T(n+1) : T(n) : T(n)) \equiv \left(-\frac{T(n+1)}{T(n)} : 1 : 1\right)$$

$$U_n(2T(n-1) : T(n) : T(n)) \equiv \left(\frac{2T(n-1)}{T(n)} : 1 : 1\right)$$

Вычисляя пределы координатных выражений при $n \to \infty$ получаем, что $W_n \to U(-2 : 1 : 1)$ (точка U показана на Рис. 2) и $U_n \to V_1(2 : 1 : 1)$. Схематично преобразование, взятых точек на исследуемой проективной прямой, можно показать на Рис. 5.

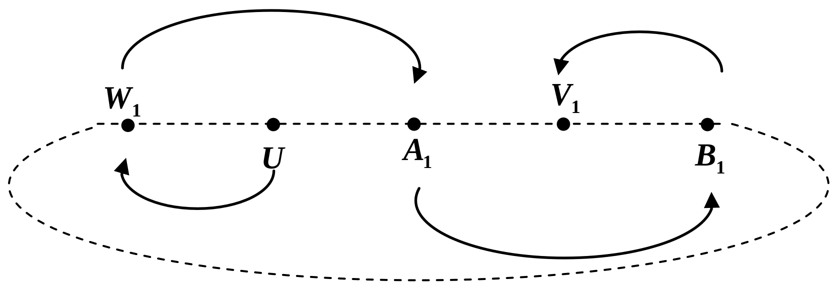

Рис. 5

Введём преобразования: $X = \dfrac{x_2}{x_1}$, $Y = \dfrac{x_3}{x_1}$. Теперь преобразования наших точек можем представить в ортогональных координатах X, Y (Рис. 6).

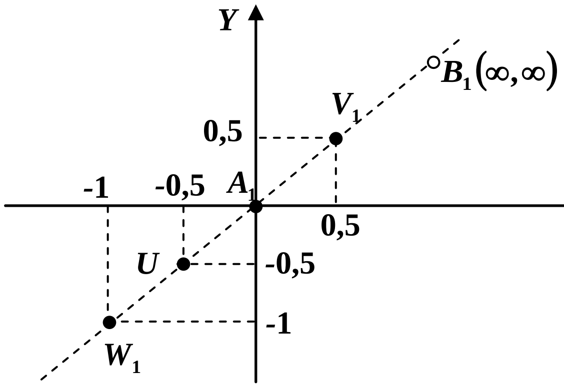

Рис. 6

Итак, мы, по сути, показали пример «выворачивания наизнанку» проективной прямой. Помним, что проективная прямая обладает кручением, но об этом поговорим в соответствующем исследовании.

Приложение

Группа преобразований координатного инвертирования

Рассмотрим матрицы $\boldsymbol{E}_i$:

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Не трудно проверить, что эти матрицы образуют неабелеву группу шестого порядка. Определяющие формулы (по О. Ю. Шмидту) имеют вид:

$$(\boldsymbol{E}_2)^2 = \boldsymbol{E}_1, \quad (\boldsymbol{E}_4)^3 = \boldsymbol{E}_1, \quad \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_4 = (\boldsymbol{E}_4)^2\boldsymbol{E}_2.$$

Групповой операцией здесь является обыкновенная операция умножения двух матриц.

Чтобы показать, что и матрицы $\boldsymbol{M}_i$ преобразования $\boldsymbol{k}$ – инверсии, показанные на стр. 2 и 3 нашего изложения, образуют группу, достаточно определить групповую операцию «$\circ$».

Итак, чтобы произвести умножение двух элементов группы $\boldsymbol{M}_i \circ \boldsymbol{M}_j$ необходимо:

1. инвертировать элементы матриц $\boldsymbol{M}_i \to \boldsymbol{E}_i$ и $\boldsymbol{M}_j \to \boldsymbol{E}_j$,
2. произвести умножение $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j = \boldsymbol{E}_k$,
3. инветрировать $\boldsymbol{E}_k \to \boldsymbol{M}_k$,
4. записать $\boldsymbol{M}_i \circ \boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{M}_k$.

Пример: $\boldsymbol{M}_5 \circ \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_6$

Заметим, что это не единственный способ определения групповой операции «$\circ$». Кстати, описанная группа, изоморфна группе сложного отношения четырёх точек на проективной прямой, а также - симметрической группе третьего порядка.

Литература

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т., «Геометрия. Часть II», М., «Просвещение», 1987

2. Клиот-Дашинский М. И., «Алгебра матриц и векторов», «Из-во ЛГУ», 1974

3. Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М, «О математической индукции», М., «Наука», 1967

4. Буземан Г., Келли П., «Проективная геометрия и проективные метрики», М., «ИЛ», 1957

5. Шмидт О. Ю., «Абстрактная теория групп», Киев, «Изд. Киевского ун-та», 1916

6. Бескин Н. М., «Деление отрезка в данном отношении», М., «Наука», 1973

7. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980