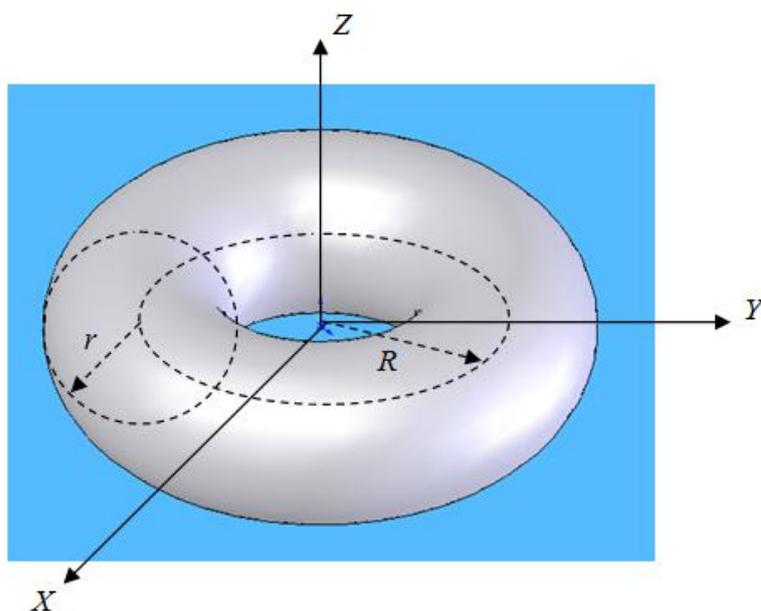


Франц Герман

Некоторые вопросы дифференциальной геометрии (franz.h-n@yandex.ru)



2008

Содержание

1. Дифференциальное уравнение сопряжённых пространств	стр. 3
2. Вторая квадратичная форма и конические поверхности	стр. 6
3. Геодезические линии	стр. 8
4. Тороида	стр. 14
5. Литература	стр. 21

1. Дифференциальное уравнение сопряжённых пространств

... понять уравнение – значит написать его решение, не решая

Р. Фейнман

Известно, что ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора связаны системой линейных уравнений.

Оказывается, что существует ещё и дифференциальное уравнение, связывающее ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора.

Рассмотрим сопряжённые базисы $\{e^1, e^2, e^3\}$ и $\{e_1, e_2, e_3\}$ соответственно сопряжённых линейных пространств L^3 и L_3 .

По определению, скалярное произведение сопряжённых базисных векторов равно значениям символов Кронекера (значениям дельты Кронекера):

$$(e_i, e^j) = (e^j, e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Компоненты метрического тензора пространства L_3 определяются скалярными произведениями базисных векторов этого пространства:

$$(e_i, e_j) = (e_j, e_i) = g_{ij} = g_{ji}.$$

Аналогично и для сопряжённого пространства:

$$(e^i, e^j) = (e^j, e^i) = g^{ij} = g^{ji}.$$

Рассмотрим в L_3 произвольный вектор \vec{a} .

$$\vec{a} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3, \quad (1)$$

где x^i - контравариантные координаты данного вектора.

Соответственно, разложение данного вектора по координатам в L^3 будет иметь вид:

$$\vec{a} = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, \quad (2)$$

где x_i - ковариантные координаты данного вектора.

Умножим (1) и (2) скалярно на e_1 , соответственно получим $(\vec{a}, e_1) = x^1 g_{11} + x^2 g_{21} + x^3 g_{31}$, и $(\vec{a}, e_1) = x_1$, или можем записать:

$$x_1 = x^1 g_{11} + x^2 g_{12} + x^3 g_{13}. \quad (3)$$

Умножая (1) и (2) скалярно сначала на e_2 потом на e_3 , соответственно получаем:

$$x_2 = x^1 g_{21} + x^2 g_{22} + x^3 g_{23}, \quad (4)$$

$$x_3 = x^1 g_{31} + x^2 g_{32} + x^3 g_{33}. \quad (5)$$

Система уравнений (3), (4), (5) определяет зависимость между ковариантными и контравариантными координатами вектора \vec{a} .

Продифференцируем (3) по x^2 , а (4) по x^1 , тогда, соответственно, получаем: $\frac{\partial x_1}{\partial x^2} = g_{12}$ и $\frac{\partial x_2}{\partial x^1} = g_{21}$. Но, в силу определения компонент метрического тензора, можем записать:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x^2} = \frac{\partial x_2}{\partial x^1}. \quad (6)$$

Действуя аналогично, т. е. дифференцируя (4) по x^3 и (5) по x^2 , а также - (3) по x^3 и (5) по x^1 , получаем соответственно:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x^3} = \frac{\partial x_3}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x^3} = \frac{\partial x_3}{\partial x^1}. \quad (8)$$

Выражения (6), (7) и (8) ни что иное, как условия для дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$x_1 dx^1 + x_2 dx^2 + x_3 dx^3 = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) будем называть *дифференциальным уравнением сопряжённых пространств*.

Решим уравнение (9).

Для удобства введём обозначения, используемые в большинстве литературы по дифференциальным уравнениям: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и $x_1 = P(x, y, z)$, $x_2 = Q(x, y, z)$, $x_3 = R(x, y, z)$. В этих обозначениях уравнение (9) примет вид:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

где $P = xg_{11} + yg_{12} + zg_{13}$, $Q = xg_{21} + yg_{22} + zg_{23}$, $R = xg_{31} + yg_{32} + zg_{33}$. Помним, что $g_{ij} = g_{ji}$.

$$\int Pdx + Qdy + Rdz = F(x, y, z) = const.$$

$$F(x, y, z) = \int Pdx + q(y) + r(z) = \int (xg_{11} + yg_{12} + zg_{13})dx + q(y) + r(z) =$$

$$= g_{11} \frac{x^2}{2} + g_{12}yx + g_{13}zx + q(y) + r(z).$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = g_{12}x + \frac{\partial q}{\partial y} = Q = g_{21}x + g_{22}y + g_{23}z.$$

Т. к. $g_{12} = g_{21}$, получаем такое уравнение: $q'_y = g_{22}y + g_{23}z$ и $q(y) = \int (g_{22}y + g_{23}z) dy = g_{22} \frac{y^2}{2} + g_{23}zy$.

Аналогично находим $r(z)$.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = g_{13}x + \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} = g_{13}x + \frac{\partial r}{\partial z} + g_{23}y = R = g_{31}x + g_{32}y + g_{33}z.$$

Откуда, $r'_z = g_{33}z$. Тогда $r(z) = \int g_{33}z dz = g_{33} \frac{z^2}{2}$.

Окончательно получаем:

$$F(x, y, z) = const = g_{11} \frac{x^2}{2} + g_{22} \frac{y^2}{2} + g_{33} \frac{z^2}{2} + g_{12}xy + g_{13}xz + g_{23}yz.$$

Как известно, данная константа (т. е. правая часть последнего выражения) ни что иное, как половина длины вектора \vec{a} , т. е. инвариант для данного вектора в произвольном базисе любого из сопряжённых пространств трёх измерений. Т. о., с учётом правила сложения Эйнштейна, можем записать:

$$a^2 = 2 \int x_i dx^i. \quad (10)$$

В наших рассуждениях ковариантные и контравариантные координаты совершенно симметричны относительно сопряжённых пространств, поэтому уравнение (10) справедливее было бы представить в таком виде:

$$x_i dx^i = x^i dx_i = 0, \quad (11)$$

а формулу (10) - в симметричном виде относительно ковариантных и контравариантных координат:

$$a^2 = \int x_i dx^i + \int x^i dx_i. \quad (12)$$

Выражение (12), по аналогии с традиционной дифференциальной метрикой (простейший её вид: $da^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$), можно назвать *интегральной метрикой сопряжённых пространств*.

Нам кажется, что было бы интересно проанализировать выражение (12) с точки зрения его геометрического смысла (в основе геометрического понятия элементарной метрики лежит теорема Пифагора), но это тема самостоятельного исследования.

2. Вторая квадратичная форма и конические поверхности

В данной работе будет введено понятие *нормальной квадратичной формы*, показана связь между нормальной и второй квадратичными формами и рассмотрена поверхность, для которой нормальная и вторая квадратичные формы тождественны.

Пусть дана некоторая параметризованная поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

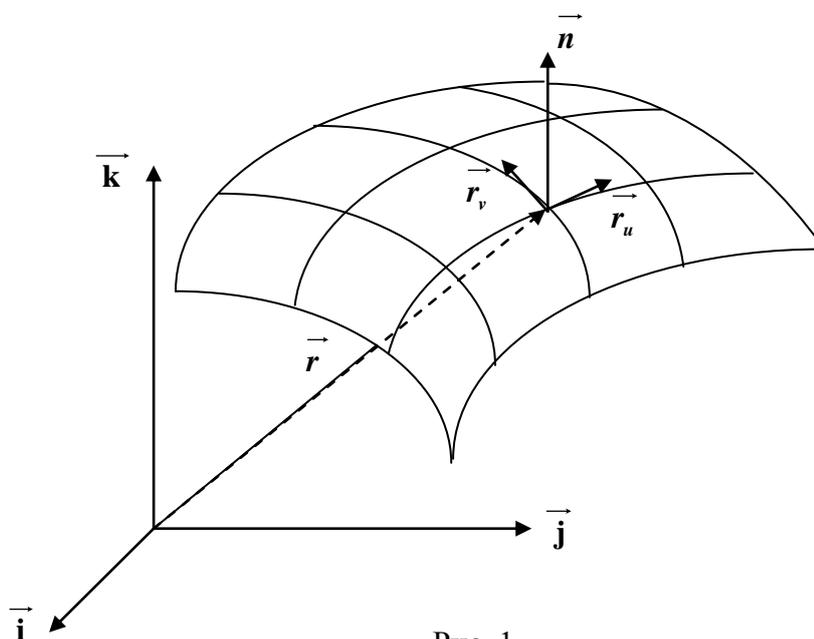


Рис. 1

Дифференциал вектора имеет выражение $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, вектор \vec{n} - является единичным нормальным вектором к данной поверхности и определяется как

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|} \times \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|}.$$

Рассмотрим дифференциал скалярного произведения $\vec{r} \cdot \vec{n}$.

$$d(\vec{r} \cdot \vec{n}) = d\vec{r} \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot d\vec{n}.$$

$$\vec{n} \cdot d\vec{r} = \vec{n} \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = 0,$$

т. к. $\vec{n} \cdot \vec{r}_u = 0$ и $\vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$ (векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v образуют касательную плоскость). Тогда получаем:

$$d(\vec{r} \cdot \vec{n}) = \vec{r} \cdot d\vec{n}$$

Рассмотрим второй дифференциал скалярного произведения $\vec{r} \cdot \vec{n}$.

$$d^2(\vec{r} \cdot \vec{n}) = d(\vec{r} \cdot d\vec{n}) = d\vec{r} \cdot d\vec{n} + \vec{r} \cdot d^2\vec{n} \quad (13)$$

Так как $\vec{n} \cdot d\vec{r} = 0$, то и $d(\vec{n} \cdot d\vec{r}) = 0$. Раскрывая последний дифференциал, получаем: $d\vec{n} \cdot d\vec{r} + \vec{n} \cdot d^2\vec{r} = 0$ или $-d\vec{n} \cdot d\vec{r} = \vec{n} \cdot d^2\vec{r}$.

Подставим полученное выражение в (1):

$$d^2(\vec{r} \cdot \vec{n}) = \vec{r} \cdot d^2\vec{n} - \vec{n} \cdot d^2\vec{r} \quad (14)$$

В выражении (14) $\vec{n} \cdot d^2\vec{r}$ - является второй квадратичной формой для поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Выражение $\vec{r} \cdot d^2\vec{n}$ будем называть *нормальной квадратичной формой*. Тогда выражение (14) является естественной связью между второй и нормальной квадратичными формами.

Рассмотрим случай, когда $(\vec{r} \cdot \vec{n}) = 0$. Это возможно в том случае, когда радиус-вектор, описывающий поверхность, всегда принадлежит касательной плоскости, образованной векторами \vec{r}_u и \vec{r}_v .

Рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат (Рис. 2)

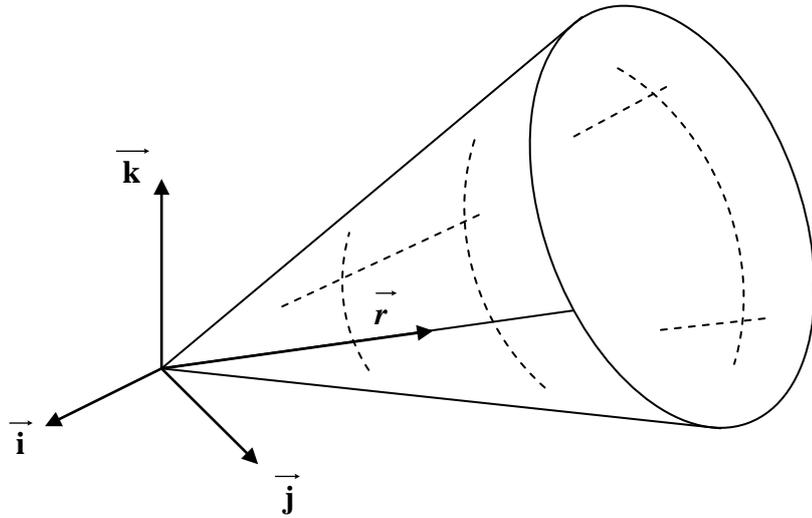


Рис. 2

Для такой поверхности, радиус-вектор \vec{r} , является одновременно и образующей, т. е. \vec{r} всегда лежит в касательной плоскости. И, следовательно, всегда будем иметь $(\vec{r} \cdot \vec{n}) = 0$, а из уравнения (14) следует, что вторая и нормальная квадратичные формы тождественны.

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = \vec{r} \cdot d^2\vec{n} \quad (15)$$

Как видим из выражения (15), вторая квадратичная форма для данной поверхности может быть задана симметрично по отношению к радиус-вектору и нормали полученной поверхности.

3. Геодезические линии

Данная работа носит скорее методический характер нежели исследовательский. В абсолютном большинстве литературы по классической дифференциальной геометрии практически не уделяется, на наш взгляд, внимания конкретному построению и решению уравнений геодезических линий.

Мы рассмотрим здесь два примера. Подробное пошаговое построение и решение уравнений геодезических линий на поверхности правильного конуса и тора.

Как известно, коническая поверхность может быть развёрнута на плоскость. В этом случае геодезические линии должны представлять собой прямые линии. В этом мы и постараемся убедиться на изложенном ниже примере.

Что касается тора, то последнее время тор всё больше привлекает внимание как математиков, так и физиков. Поэтому мы решили, в качестве второго примера, рассмотреть построение геодезических линий на простейшем торе.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение кругового конуса имеет вид:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0 \quad (16)$$

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z) уравнение (1) может быть представлено в параметрическом виде:

$$\rho = a \cdot z, \quad x = \rho \cdot \cos(\varphi), \quad y = \rho \cdot \sin(\varphi), \quad a = \frac{R}{C}.$$

Эвклидова метрика в цилиндрических координатах имеет вид: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. Тогда, в силу того, что $\rho^2 = a^2 \cdot z^2$ и $d\rho = a \cdot dz$, метрика на конусе в координатах (φ, z) будет иметь вид:

$$ds^2 = a^2 dz^2 + a^2 z^2 d\varphi^2 + dz^2 = a^2 z^2 d\varphi^2 + (a^2 + 1) dz^2$$

В общем виде геодезические линии на поверхности записываются уравнениями:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (17)$$

Чтобы построить уравнения (17) необходимо вычислить символы связности (символы Кристоффеля) Γ_{ij}^k . Символы связности вычисляются по формуле:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Зная метрику, можно построить матрицу метрического тензора:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 z^2 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы метрического тензора равен $g = a^2 z^2 (a^2 + 1)$. Обозначим через G^{ij} алгебраические дополнения для элементов матрицы g_{ij} , тогда:

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = g_{12} = g_{21} = 0,$$

$$g^{11} = \frac{G^{11}}{g} = \frac{a^2 + 1}{a^2 z^2 (a^2 + 1)} = \frac{1}{a^2 z^2}, \quad g^{22} = \frac{G^{22}}{g} = \frac{a^2 z^2}{a^2 z^2 (a^2 + 1)} = \frac{1}{a^2 + 1}.$$

Введём обозначения: $x^1 = \varphi$; $x^2 = z$.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 z^2} (2a^2 z) = \frac{1}{z};$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{z};$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = 0;$$

Аналогично вычисляются символы связности и для x^2 .

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(a^2 + 1)} 2a^2 z = -\frac{a^2 z}{a^2 + 1};$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = 0;$$

Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{2}{z} \frac{dz}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{a^2 z}{a^2 + 1} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) и есть система уравнений геодезических линий на круговом конусе.

Введём обозначения: $\frac{dz}{dt} = \dot{z}_t$, $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}_t$, $\frac{dz}{d\varphi} = \dot{z}_\varphi$, тогда $\dot{z}_t = \dot{z}_\varphi \cdot \dot{\varphi}_t$, и

$$\ddot{z}_t = \ddot{z}_\varphi \cdot \left(\dot{\varphi}_t\right)^2 + \dot{z}_\varphi \ddot{\varphi}_t. \quad (19)$$

Таким образом, используя (19) и систему уравнений (18) получаем такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{a^2 z}{a^2 + 1} \left(\dot{\varphi}_t\right)^2 = \ddot{z}_\varphi \left(\dot{\varphi}_t\right)^2 + \dot{z}_\varphi \left(-\frac{2}{z} \dot{z}_t \dot{\varphi}_t\right) = \ddot{z}_\varphi \left(\dot{\varphi}_t\right)^2 - \dot{z}_\varphi \frac{2}{z} \dot{z}_\varphi \left(\dot{\varphi}_t\right)^2$$

или

$$\frac{a^2 z}{a^2 + 1} = \ddot{z}_\varphi - \frac{2}{z} \left(\dot{z}_\varphi\right)^2.$$

Помня, что z есть функция от φ и опуская индекс для простоты записи, последнее уравнение будет иметь вид:

$$\ddot{z} - \frac{2}{z} \left(\dot{z}\right)^2 = \frac{a^2 z}{a^2 + 1}. \quad (20)$$

Решим уравнение (20).

$$\ddot{z} z - 2 \cdot \left(\dot{z}\right)^2 = \frac{a^2 z^2}{a^2 + 1}, \quad \frac{\ddot{z}}{z} - 2 \cdot \left(\frac{\dot{z}}{z}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1}.$$

Сделаем замену: $\frac{\dot{z}}{z} = p$, тогда: $\dot{p} = \frac{\ddot{z} \cdot z - \left(\dot{z}\right)^2}{z^2} = \frac{\ddot{z}}{z} - \left(\frac{\dot{z}}{z}\right)^2$. Откуда имеем:

$$\dot{p} - p^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1}, \quad \frac{dp}{d\varphi} = p^2 + \frac{a^2}{a^2 + 1}, \quad \varphi = \int \frac{dp}{p^2 + \frac{a^2}{a^2 + 1}}.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем:

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{p\sqrt{a^2 + 1}}{a} \right) + C_1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} (\varphi - C_1) \right) = \frac{p\sqrt{a^2 + 1}}{a}.$$

Переходя снова от p к z , получаем:

$$\int \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right) d\varphi = \int \frac{dz}{z},$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \int \frac{\operatorname{Sin} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right)}{\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right)} d\varphi = \ln(z) \quad \text{или}$$

$$\ln(z) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \int \frac{d \left(\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right) \right)}{\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right)}.$$

Интегрируя последнее выражение, имеем:

$$\ln(z) = -\ln \left| \operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right) \right| + \ln(C_2).$$

Окончательно получаем:

$$z = \frac{C_2}{\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi - C_1) \right)} \quad (21)$$

Это и есть уравнение геодезических линий на круговом конусе.

Пусть требуется построить геодезическую линию, проходящую через точки конуса $A(\varphi_1, z_1)$ и $B(\varphi_2, z_2)$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} z_1 = \frac{C_2}{\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi_1 - C_1) \right)} \\ z_2 = \frac{C_2}{\operatorname{Cos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} (\varphi_2 - C_1) \right)} \end{cases}$$

находим C_1 и C_2 . Найденные значения надо подставить в (21). Это и будет уравнением, описывающим кратчайший путь на поверхности нашего конуса от точки $A(\varphi_1, z_1)$ к точке $B(\varphi_2, z_2)$.

Представим наш конус в виде развёртки на плоскости.

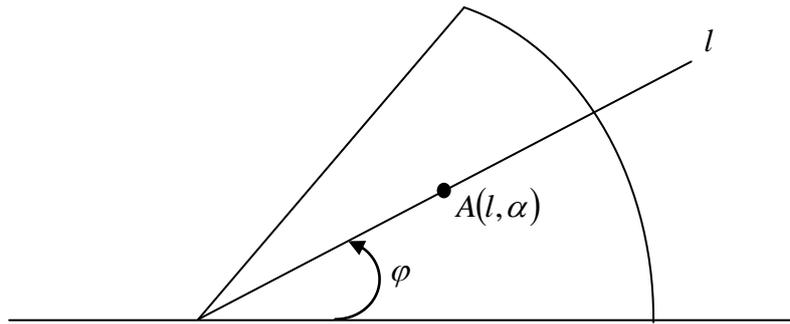


Рис. 3

Для такой развёртки можно ввести полярные координаты l и α , как показано на рисунке. Найдём выражения $z = z(l)$ и $\varphi(\alpha)$, и полученные результаты подставим в (21).

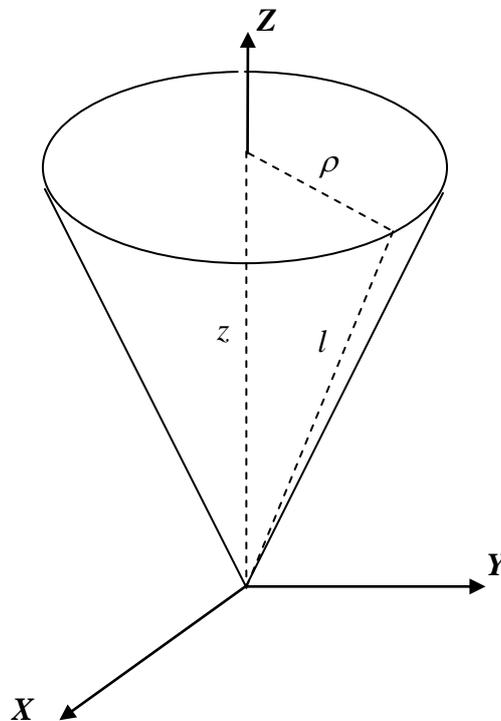


Рис. 4

$$\rho = a \cdot z, \quad l = \sqrt{a^2 z^2 + z^2} = z \sqrt{a^2 + 1}.$$

Углы φ и α связаны соотношением: $\rho \cdot \varphi = l \cdot \alpha$. Откуда получаем интересные нас соотношения.

$$\varphi = \alpha \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \quad z = \frac{l}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Подставив полученные выражения в (21), получаем уравнения геодезических в полярных координатах (l, α) :

$$l = \frac{C_2 \sqrt{a^2 + 1}}{\cos\left(\frac{C_1 a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) \cdot \cos(\alpha) + \sin\left(\frac{C_1 a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) \sin(\alpha)} \quad (22)$$

В общем виде уравнение (22) имеет вид:

$$l = \frac{k}{m \cdot \cos(\alpha) + n \cdot \sin(\alpha)},$$

а это ни что иное, как уравнение прямой в полярных координатах (l, α) .

Аналогично строятся уравнения геодезических линий для тора. Мы рассмотрим простейший тор, для которого $r_1 = r_2 = R$. Условное сечение такого тора показано на Рис. 5.

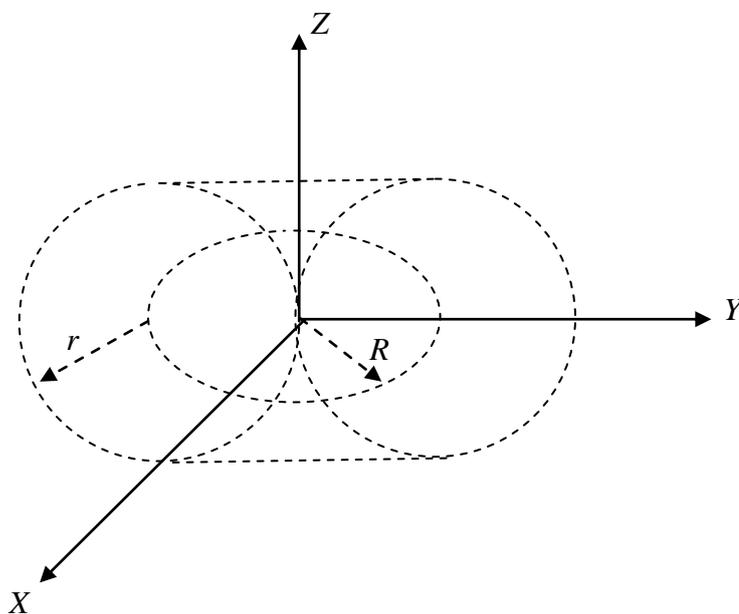


Рис. 5

Уравнение такого тора и метрика dS в сферических координатах (ρ, φ, θ) имеют соответственно вид:

$$\rho = 2R \sin(\theta), \quad dL^2 = (d\theta)^2 + \sin(\theta)^4 \cdot (d\varphi)^2,$$

где $dL = \frac{dS}{2R}$.

Покажем матрицу метрического тензора и символы Кристоффеля.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin(\theta)^4 \end{pmatrix}, \quad g = \sin(\theta)^4,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}4\text{Sin}(\theta)^3 \cdot \text{Cos}(\theta), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 2\text{Ctg}(\theta).$$

Получаем такую систему дифференциальных уравнений геодезических линий на простейшем торе:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \text{Sin}(\theta)^2 \cdot \text{Sin}(2\theta) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - 4 \cdot \text{Ctg}(\theta)^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему, аналогично вышеприведённому примеру, получаем:

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\text{Sin}(\theta)^2 \cdot \sqrt{C_1 \cdot \text{Sin}(\theta)^4 - 1}} + C_2$$

И после взятия интеграла находим уравнения геодезических линий на простейшем торе в явном виде:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{C_1 - (1 + \text{Ctg}(\theta)^2)^2} + C_2$$

4. Тороида

В данной работе будет рассмотрен пример построения замкнутых кривых на торе. Пусть дан некоторый тор с радиусами R и r (Рис.6).

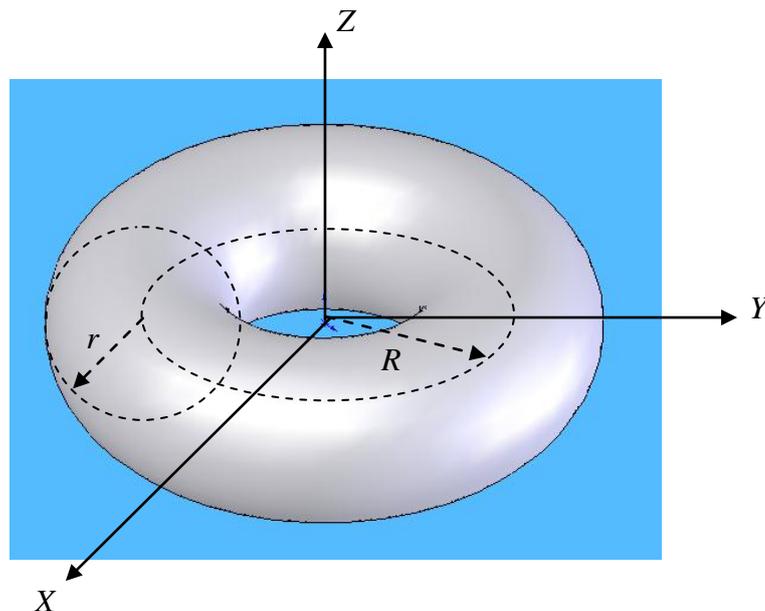


Рис. 6

Точка $M(\rho, \varphi, \theta)$ (сферические координаты) принадлежит тору и движется по его поверхности следующим образом. Радиус-вектор $\vec{\rho}$ является результирующим двух векторов $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$. Радиус-вектор $\vec{\rho}_1$ движется в плоскости XOY и описывает своим концом окружность с радиусом R . Вектор $\vec{\rho}_2$ принадлежит в каждый момент времени плоскости, проходящей через ось OZ и перпендикулярной плоскости XOY . Причём, эта плоскость содержит вектор $\vec{\rho}_1$ и точку M . Основание вектора $\vec{\rho}_2$ принадлежит концу вектора $\vec{\rho}_1$ и $|\vec{\rho}_2| = r$. Окружность, описываемая концом вектора $\vec{\rho}_1$ называется осевой линией тора. Во время движения вектора $\vec{\rho}_1$, вектор $\vec{\rho}_2$ совершает равномерное вращательное движение вокруг осевой линии тора.

Определение:

Замкнутую кривую на торе, образованную некоторым движением точки M , будем называть тороидой.

Выведем уравнение тороиды. Все выкладки для удобства будем проводить в сферических координатах.

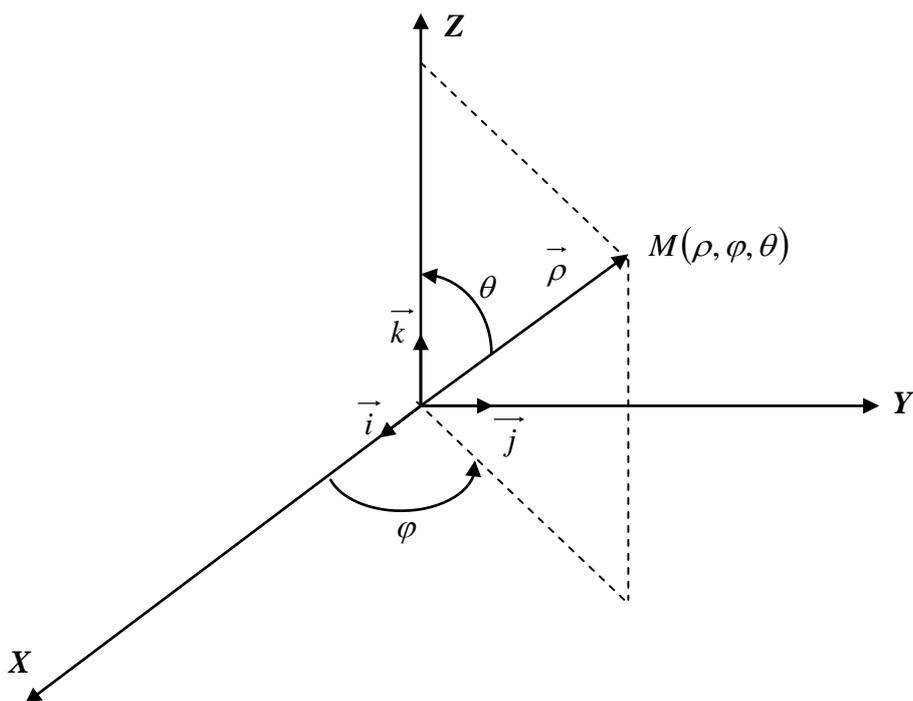


Рис. 7

Рассмотрим векторное уравнение, описывающее единичную окружность (радиус окружности равен единице) в плоскости XOY .

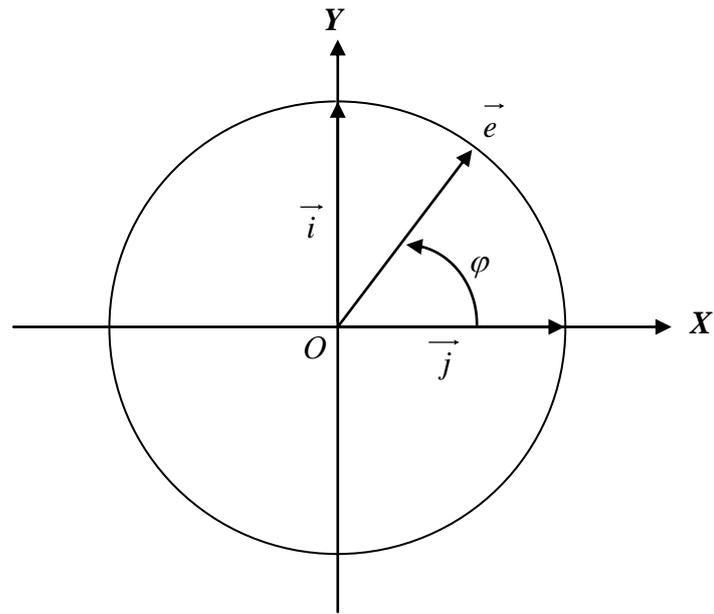


Рис. 8

$$\vec{e} = |\vec{e}| \cdot (\vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)) = \vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi) \quad (23)$$

Теперь можем приступить непосредственно к выводу уравнения тороиды. Пусть в некоторый момент времени точка M имеет положение, показанное на Рис. 9.

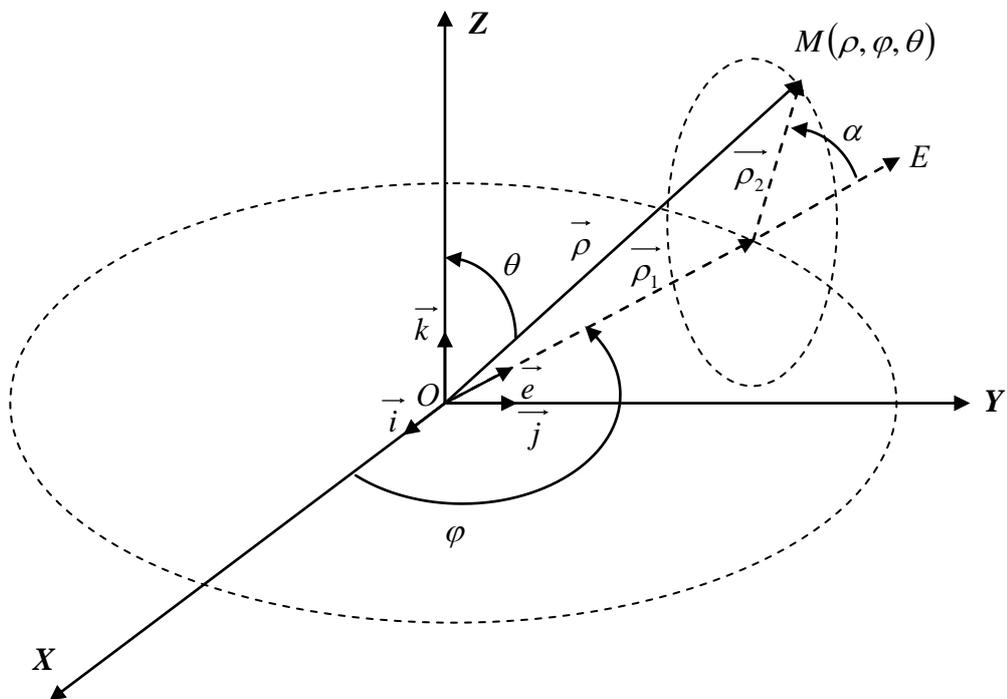


Рис. 9

Как видим (Рис. 4), $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2$. Конец вектора $\vec{\rho}_1$ описывает окружность радиуса R в плоскости XOY . Учитывая (23), можно записать векторное уравнение этой окружности (24).

$$\vec{\rho}_1 = R \cdot (\vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)) \quad (24)$$

Конец вектора $\vec{\rho}_2$ описывает также окружность, но радиуса r (Рис. 10).

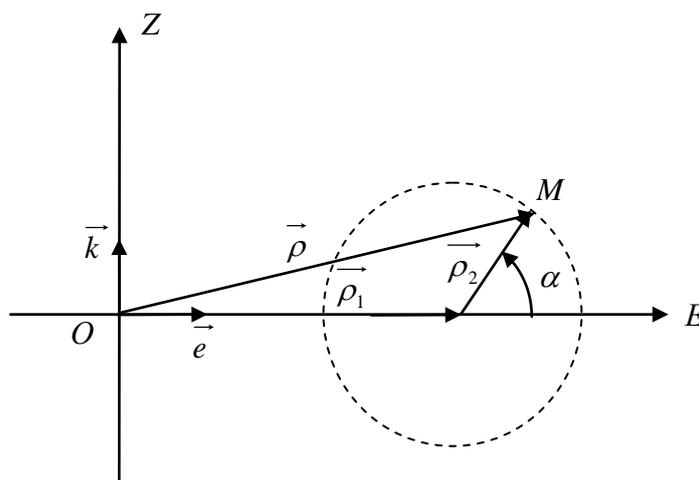


Рис. 10

При условии, что $\vec{\rho}_2$ - это радиус вектор, т. е. его начало находится в точке O , уравнение такой окружности имеет вид:

$$\vec{\rho}_2 = r \cdot (\vec{e} \cdot \cos(\alpha) + \vec{k} \cdot \sin(\alpha)) \quad (25)$$

По определению тороида – замкнутая линия. Это значит, что когда $\vec{\rho}_1$ повернется на угол 2π , вектор $\vec{\rho}_2$ должен повернуться на угол $\omega \cdot 2\pi$, где ω - некоторое число.

В зависимости от ω будем различать тороиды двух типов. При $\omega = 1, 2, 3, \dots$ будем называть тороиды тороидами спирального типа. При $\omega = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ получим тороиды пружинного типа. Названия даны из чисто внешних соображений. В первом случае тороида похожа на замкнутую спираль. Во втором – напоминает некоторую пружину (Рис. 11)

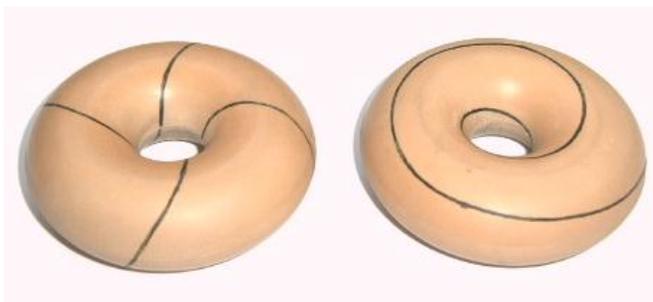


Рис. 11

На рисунке показаны тороиды для $\omega = 4$ (спиральный тип) и $\omega = \frac{1}{4}$ (пружинный тип).

Условие замкнутости имеет выражение:

$$\alpha = \omega \cdot \varphi, \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{1}{\omega} \cdot \alpha \quad (26)$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения:

$$\cos(n \cdot \varphi) = \cos(\varphi)^n - C_n^2 \cdot \cos(\varphi)^{n-2} \cdot \sin(\varphi)^2 + C_n^4 \cdot \cos(\varphi)^{n-4} \cdot \sin(\varphi)^4 - \dots \quad (27)$$

$$\sin(n \cdot \varphi) = n \cdot \cos(\varphi)^{n-1} \cdot \sin(\varphi) - C_n^3 \cdot \cos(\varphi)^{n-3} \cdot \sin(\varphi)^3 + C_n^5 \cdot \cos(\varphi)^{n-5} \cdot \sin(\varphi)^5 - \dots \quad (28)$$

Пусть вектор $\vec{\rho}_1$ повернётся на некоторый угол φ , а вектор $\vec{\rho}_2$ за это время повернулся на угол $\alpha = \omega \cdot \varphi$. С учётом (1) $\vec{\rho}_1 = R \cdot \vec{e}$. Тогда

$$\vec{\rho} = (R + r \cdot \cos(\omega \cdot \varphi)) \cdot \vec{e} + r \cdot \sin(\omega \cdot \varphi) \cdot \vec{k} \quad (29)$$

С учётом (27) и (28) уравнение (29) можно было бы написать в развёрнутом виде, но ввиду громоздкости выражения мы этого здесь делать не будем. Окончательно уравнение тороиды имеет вид:

$$\vec{\rho} = (R + r \cdot \cos(\omega \cdot \varphi)) \cdot (\vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)) + r \cdot \sin(\omega \cdot \varphi) \cdot \vec{k} \quad (30)$$

Единичным тором будем называть тор, у которого $R = r = 1$.

Рассмотрим несколько частных случаев тороид.

Для случая $\omega = 1$ будем иметь единичную тороиду, которую одновременно можно отнести и к спиральному, и к пружинному типу. Получаем такое уравнение:

$$\vec{\rho} = (1 + \cos(\varphi)) \cdot \vec{e} + \sin(\varphi) \cdot \vec{k} \quad (31)$$

Для случая $\omega = 2$ получаем уравнение простейшей спиральной тороиды:

$$\vec{\rho} = 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e} + \sin(\varphi) \cdot \vec{k}) \quad (32)$$

Для случая $\omega = \frac{1}{2}$ получаем уравнение простейшей пружинной тороиды:

$$\vec{\rho} = \left(1 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \vec{e} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \vec{k} \quad (33)$$

Введём ещё одно обозначение. Обозначим через \vec{n} единичный вектор в направлении вектора $\vec{\rho}_2$. По аналогии с вектором \vec{e} .

$$\vec{n} = \vec{e} \cdot \text{Cos}(x) + \vec{k} \cdot \text{Sin}(x)$$

Тогда уравнение (8) можно записать:

$$\vec{\rho} = R \cdot \vec{e} + r \cdot \vec{n} ,$$

где $\vec{e} = \vec{i} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{j} \cdot \text{Sin}(\varphi)$, $\vec{n} = \vec{e} \cdot \text{Cos}(\omega \cdot \varphi) + \vec{k} \cdot \text{Sin}(\omega \cdot \varphi)$. А уравнения (31), (32) и (33) – как (34), (35) и (36) соответственно:

$$\vec{\rho} = \vec{e} + \vec{n} , \quad (34)$$

где $\vec{e} = \vec{i} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{j} \cdot \text{Sin}(\varphi)$, $\vec{n} = \vec{e} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{k} \cdot \text{Sin}(\varphi)$,

$$\vec{\rho} = 2 \cdot \text{Cos}(\varphi) \cdot \vec{n} , \quad (35)$$

где $\vec{e} = \vec{i} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{j} \cdot \text{Sin}(\varphi)$, $\vec{n} = \vec{e} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{k} \cdot \text{Sin}(\varphi)$,

$$\vec{\rho} = \vec{e} + \vec{n} , \quad (36)$$

где $\vec{e} = \vec{i} \cdot \text{Cos}(\varphi) + \vec{j} \cdot \text{Sin}(\varphi)$, $\vec{n} = \vec{e} \cdot \text{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{k} \cdot \text{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Немного топологии. Склеим из прямоугольной полосы бумаги длиной L и шириной H лист мёбиуса M^+ . Лист Мёбиуса может быть лево- или правозакрученным. Чтобы их различать справа наверху от буквы M будем ставить либо $+$, либо $-$. Пусть для определённости будет $+$. Разрежем наш лист Мёбиуса вдоль осевой линии. Получим двухстороннюю поверхность, которая называется дважды скрученный цилиндр длиной $2L$ и шириной $\frac{H}{2}$. Такой цилиндр будем обозначать Z^{2+} . Теперь возьмём две одинаковые

прямоугольные полосы бумаги длиной L и шириной $\frac{H}{2}$. И, наложив их друг на друга, снова склеим M^+ . Полученный лист Мёбиуса можно развернуть (расслоить). Тогда снова получим тот же самый скрученный цилиндр Z^{2+} . Т. е. операция разрезания и расслоения в данном случае топологически эквивалентны. На языке топологии это можно записать следующим образом:

$$M^+ \xrightarrow{a} Z^{2+} .$$

Здесь буквой « a » над стрелочкой будем обозначать операцию расслоения (разрезания). Обратную операцию назовём операцией наслоения и будем обозначать: a^{-1} , т. е.

$$Z^{2+} \xrightarrow{a^{-1}} M^+$$

Заметим, что окрестность тороиды для случая $\omega = 2$ будет ни что иное, как дважды скрученный цилиндр. Можно говорить о том, что тор, как носитель этой тороиды, является носителем фигуры из которой потом можно построить лист Мёбиуса. Условно схема таких преобразований показана на рисунке 12.

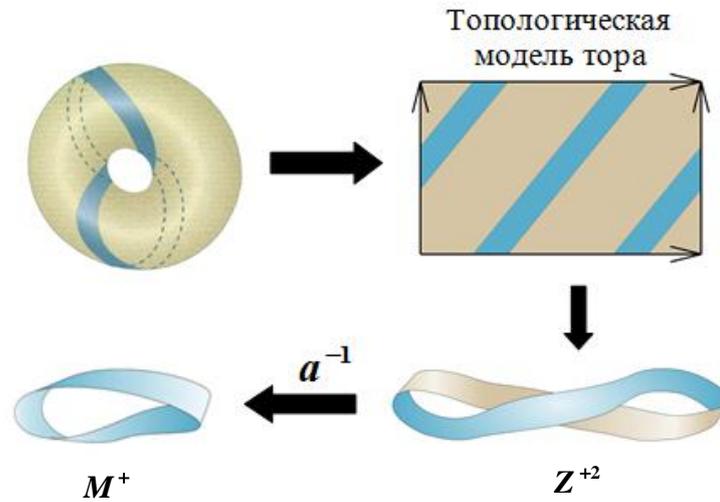


Рис. 12

Литература

- 1 А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990
- 2 Ю. А. Аминов, «Дифференциальная геометрия и топология кривых», М., «НАУКА», 1987
- 3 Ю. А. Аминов, «Геометрия векторного поля», М., «НАУКА», 1990
- 4 Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия II», М., «Просвещение», 1987
- 5 Л. С. Атанасян, Г. Б. Гуревич, «Геометрия II», М., «Просвещение», 1976
- 6 И. Я. Бакельман, «Высшая геометрия», М., «Просвещение», 1967
- 7 Дж. Брус, П. Джиблин, «Кривые и особенности», М., «Мир», 1988
- 8 И. Н. Векуа, «Основы тензорного анализа и теории ковариантов», М., «НАУКА», 1978
- 9 Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский, «Дифференциальные уравнения», М., «Высшая школа», 1976
- 10 Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М., «НАУКА», 1979
- 11 И. П. Егоров, «Геометрия», М., «Просвещение», 1979
- 12 Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн, «Линейная алгебра и многомерная геометрия», М., «НАУКА», 1974
- 13 Н. И. Кованцов и др., «Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ», Киев, «Вища школа», 1982
- 14 Г. Ф. Лаптев, «Элементы векторного исчисления», М., «НАУКА», 1975
- 15 А. Дж. Мак-Коннел, «Введение в тензорный анализ», М., «Издательство физико-математической литературы», 1963
- 16 О. В. Мантуров, «Элементы тензорного исчисления», М., «Просвещение», 1991
- 17 «Математика, XIX век», М., «НАУКА», 1981
- 18 Н. И. Мусхелишвили, «Курс аналитической геометрии», М., «Высшая школа», 1967
- 19 С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», М., «НАУКА», 1987
- 20 А. П. Норден, «Пространства аффинной связности», М., «НАУКА», 1976
- 21 А. П. Норден, «Краткий курс дифференциальной геометрии», М., «Издательство физико-математической литературы», 1958

- 22 Б. Е. Победря, «Лекции по тензорному анализу», М., «Издательство Московского Университета», 1974
- 23 А. В. Погорелов, «Геометрия», М., «НАУКА», 1983
- 24 Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, «Дифференциальная геометрия», М., «Издательство Московского Университета», 1990
- 25 М. М. Постников, «Линейная алгебра и Дифференциальная Геометрия», М., «НАУКА», 1979
- 26 П. К. Рашевский, «Риманова геометрия и тензорный анализ», М., «НАУКА», 1967
- 27 П. К. Рашевский, «Курс дифференциальной геометрии», М., «Издательство технико-теоретической литературы», 1956
- 28 Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
- 29 Б. А. Розенфельд, «История неевклидовой геометрии», М., «НАУКА», 1976
- 30 Б. А. Розенфельд, «Аполлоний Пернский», М., «Московский центр непрерывного математического образования, 2004
- 31 И. С. Сокольников, «Тензорный анализ», М., «НАУКА», 1971
- 32 В. И. Шуликовский, «Классическая дифференциальная геометрия», М., «Издательство физико-математической литературы», 1963
- 33 Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «Дифференциалы помогают геометрии», М., «Просвещение», 1982