А.Л. Смолин

ИАЭ-4159/1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА НА ОСНОВЕ ГИПЕРДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Москва 1985

РУБРИКАТОР ПРЕПРИНТОВ ИАЭ

1. Общая, теоретическая и математическая физика
2. Ядерная физика

3. Общие проблемы ядерной энергетики
4. Физика и техника ядерных реакторов
5. Методы и программы расчета ядерных реакторов

6. Теоретическая физика плазмы
7. Экспериментальная физика плазмы и управляемый термоядерный синтез
8. Проблемы теормядерного реактора

9. Физика конденсированного состояния вещества
10. Физика низких температур и техническая сверхпроводимость
11. Радиационная физика твердого тела и радиационное материаловедение

12. Атомная и молекулярная физика
13. Химия и химическая технология

14. Приборы и техника эксперимента
15. Автоматизация и методы обработки экспериментальных данных
16. Вычислительная математика и техника

Индекс рубрики дается через дробь после основного номера ИАЭ.

Ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова

А.Л. Смолин

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА НА ОСНОВЕ ГИПЕРДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Москва
1985

УДК 539.12:530.145

Ключевые слова: преобразования Лоренца, специальная теория относительности, гиперкомплексные числа, кватернионы.

Предлагаются преобразования, отличающиеся от лоренцевских преобразований отсутствием требования $y' = y$; $z' = z$ в случае $V_x = V$; $V_y = V_z = 0$. Получены также общие преобразования для произвольного $\vec{V}$. Естественным языком данного подхода является язык гиперкомплексных чисел. Обсуждаются некоторые следствия подобных преобразований в специальной теории относительности. Подчеркивается их связь с винтовым исчислением, с поляризационными и спиновыми свойствами движущихся с релятивистскими скоростями объектов. Приводится матричная формулировка этих преобразований.

Среди преобразований, задаваемых в кватернионной форме, наиболее общими считаются преобразования вида [1]

$$q' = pq\bar{p}, \tag{1}$$

где $q = q_\mu e_\mu = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ и $p = p_\mu e_\mu$, e_μ — кватернионные единицы со свойствами:

$$e_1 e_2 e_3 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1; \; e_0 = e_0^2 = 1,$$

а $\bar{p}$ — сопряженный кватернион: $\bar{p} = p_0 - p_k e_k = p_0 - \vec{p}\vec{e}$, где опущено e_0 и введены векторные обозначения.

В общем случае подобные преобразования задают поворот на некоторый угол θ вокруг единичного вектора $\vec{n}$, возникающего из тригонометрической формы нормированного кватерниона

$$p = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{n}\sin\frac{\theta}{2} = \exp(\vec{n}\frac{\theta}{2}); \; \bar{p} = \exp(-\vec{n}\frac{\theta}{2}). \tag{2}$$

Переход к обычным лоренцевским преобразованиям осуществляется заменой $\theta \to i\theta$. Однако для получения квадратичной формы специальной теории относительности следует заменить кватернионные единицы на единицы гипердвойных чисел [2] со следующими свойствами:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_0^2 = 1; \; e_1 e_2 e_3 = \pm i, \; e_0 = 1. \tag{3}$$

Тогда

$$\bar{p}p = p\bar{p} = (p_0 + \vec{p}\,\vec{e})(p_0 - \vec{p}\,\vec{e}) = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}. \tag{4}$$

Кватернионы сразу нашли применение в физике, начиная с середины прошлого века, после их введения Гамильтоном и до сегодняшних дней. Однако векторный и тензорный аппарат постепенно их вытеснил из физики. Сейчас наблюдается новый подъем в использовании кватернионов в различных ее разделах. Применению кватернионов в теории относительности посвящен обзор [3]. На их основе сейчас рассматриваются как досветовые, так и сверхсветовые преобразования, описывающие тахионы [4]. Существует обширная литература по применению кватернионов в квантовой механике, электродинамике (запись в кватернионной форме уравнений Максвелла), современной теории элементарных частиц.

Как отмечается в [5, 6], кроме преобразований (1) возможны также преобразования вида

$$q' = pq, \tag{5}$$

причем $\bar{q}' = \bar{q} \cdot \bar{p}$ и $\bar{q}'q' = \bar{q}\bar{p}pq = \bar{q}q$, если принять $\bar{p}p = 1$.

Обычно на этих преобразованиях подробно не останавливаются, так как они считаются менее общими, чем (1). Но именно эти преобразования содержат много интересных возможностей и, в частности, по-иному позволяют взглянуть на всю современную физику.

Рассмотрим подробнее преобразования (5). Пусть $p = A_\mu e_\mu$ и $q = x_\mu e_\mu$, e_μ — гипердвойные единицы (3). По-прежнему их будем называть кватернионными. Перемножая p на q и отделяя скалярную часть от векторной, получим вместо (5)

$$\begin{aligned} \vec{X}' &= A_0 \vec{X} + \vec{A} X_0 \pm i[\vec{A}, \vec{X}], \\ X_0' &= A_0 X_0 + \vec{A}\vec{X}. \end{aligned} \tag{6}$$

Два знака перед векторным произведением в (6) соответствуют двум независимым наборам единиц (3).

Если теперь представить A_μ в виде единичного кватерниона $A_\mu = \alpha(1, -\vec{V}/c)$, где $\alpha = (1 - \vec{V}^2/c^2)^{-1/2}$, а в качестве четырехвектора X_μ взять $X_\mu = (ct, \vec{r})$, то из (5), (6) будем иметь

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \alpha(\vec{r} - \frac{\vec{V}}{c} tc \pm \frac{i}{c} [\vec{r}, \vec{V}]), \\ t' &= \alpha(t - \vec{V}\vec{r}/c^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Матричная форма преобразований (7) приведена в приложении 1.

Очевидно, что подобные преобразования пространственно-временных координат приводят кроме изменения поперечных масштабов еще и к появлению комплексных значений у $\vec{r}'$. Обычно так как наш мир действителен, то считается, что подобные преобразования неверны, не отвечают реальности.

Рассмотрение комплексных векторов началось уже давно и связано с такими именами, как Клиффорд, Котельников и Штуди [7], изучавших винтовое исчисление. Мнимая часть комплексного вектора обычно ассоциируется с определенным моментом [8]. Это и подтверждает (7). Ниже, с помощью перехода к рассмотрению бикватернионов или октонионов, будет дан способ возврата к действительным преобразованиям. Сейчас же отметим, что преобразования (7) сохраняют инвариантной форму

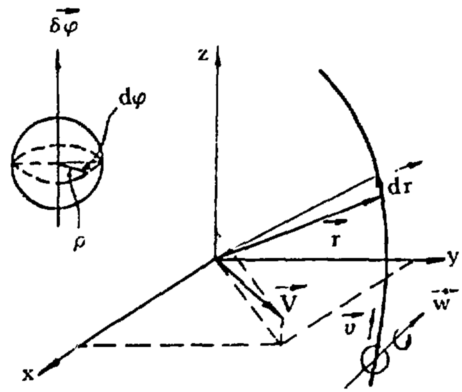
$$S^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{8}$$

и не требуют обращения к преобразованиям базиса, сохраняют четырехобъем. Среди фундаментальных проверок специальной теории относительности [9, 10] фактически нет проверок равенства поперечных масштабов [11], существуют лишь интуитивные рассуждения, да и сами проверки зачастую осуществляются с помощью неинерциальных систем отсчета. Следуя Пуанкаре, в [12] Тяпкиным отмечается конвенциальный характер определений длины пространственных и временных промежутков, сравнения масштабов в разных инерциальных системах отсчета.

Очевидно, что преобразования (7), затрагивая все четыре координаты (даже в частном случае $V_x = V$; $V_y = V_z = 0$), в еще большей степени увеличивают конвенциальность подобных определений.

Следует отметить, что преобразования (7) отвечают сразу общему случаю движения инерциальной системы в произвольном направлении, определяемом вектором $\vec{V}$. Два знака у векторного произведения в (7) соответствуют переходу в правую или левую систему координат, а в случае (6) при $X_0 = 0$ и $A_0 = 1$ эти преобразования совпадают с гиротропными преобразованиями.

Рассмотрим теперь движение произвольной точки М по заданной траектории (см. рис.). Это движение можно охарактеризовать двумя бесконечно малыми векторами $d\vec{r}$ и $d\vec{\varphi}$, где $|d\vec{\varphi}| = \rho\delta\varphi$. Обычно вторую характеристику движущейся точки в традиционном подходе к преобразованиям Лоренца не рассматривают. Однако $d\vec{\varphi}$ по сути выполняет ту же роль, что и магнитное поле в электродинамике, являясь дополнительной характеристикой, без которой описание поля будет неполным. Поэтому они должны рассматриваться совместно, участвуя равноправным образом при преобразованиях Лоренца. $\delta\varphi$ – угол поворота; ρ – радиус инерции; $\omega = \delta\varphi/dt$; $d\vec{\varphi} =$



$= \rho\vec{\omega}dt$; $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ — орбитальная скорость; $\vec{w} = d\vec{\varphi}/dt = \rho\vec{\omega}$ — аксиальная скорость; $\vec{V}$ — относительная скорость.

Введем бикватернионные преобразования. Для этого совершим замену в (6): $X_\mu \to Z_\mu = X_\mu + iY_\mu$. Тогда, отделяя действительные выражения от мнимых, получим

$$\begin{cases} \vec{X}' = \alpha(\vec{X} - \dfrac{\vec{V}}{c} X_0 \pm \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{Y}]) ; \\ X_0' = \alpha(X_0 - \vec{V}\vec{X}/c) ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{Y}' = \alpha(\vec{Y} - \dfrac{\vec{V}}{c} Y_0 \mp \dfrac{1}{c}[\vec{V}, \vec{X}]) ; \\ Y_0' = \alpha(Y_0 - \vec{V}\vec{Y}/c) . \end{cases} \tag{9}$$

Инвариантами подобных преобразований являются:

$$\begin{aligned} &\vec{X}^2 - \vec{Y}^2 - X_0^2 + Y_0^2 = \text{invar} , \\ &\vec{X}\vec{Y} - X_0 Y_0 = \text{invar} . \end{aligned} \tag{10}$$

В результате мы избавились от мнимых координат, заменив их соответственно на аксиальные характеристики. Будем считать, что $\vec{X}$ — полярный вектор, $\vec{Y}$ — аксиальный вектор, X_0 — скаляр, а Y_0 — псевдоскаляр. Если теперь вновь вернуться к рассмотрению движения материальной точки, то $\vec{X} = d\vec{r}$, $X_0 = cdt$, $\vec{Y} = d\vec{\varphi}$ и $Y_0 = cd\tau$ — аксиальное или псевдоскалярное время. Тогда вместо (9) будем иметь:

$$\begin{cases} d\vec{r}\,' = \alpha(d\vec{r} - \vec{V}dt \pm \frac{1}{c}[\vec{V}, d\vec{\varphi}]); \\ dt' = \alpha(dt - \vec{V}d\vec{r}/c^2); \end{cases} \qquad \begin{cases} d\vec{\varphi}\,' = \alpha(d\vec{\varphi} - \vec{V}d\tau \mp \frac{1}{c}[\vec{V}, d\vec{r}]); \\ d\tau' = \alpha(d\tau - \vec{V}d\vec{\varphi}/c^2). \end{cases} \tag{11}$$

Из этих преобразований вытекает не только относительность покоя или движения, то также и относительность поворотов. Из них следуют правильные выражения нерелятивистского предела (при $V/c \ll 1$) — преобразования Галилея, дополненные преобразованиями углов поворота:

$$\begin{cases} d\vec{r}\,' = d\vec{r} - \vec{V}dt; \\ dt' = dt; \end{cases} \qquad \begin{cases} d\vec{\varphi}\,' = d\vec{\varphi} - \vec{V}d\tau; \\ d\tau' = d\tau. \end{cases} \tag{12}$$

Из (11) легко могут быть получены формулы преобразования скоростей. При этом следует учесть, что в общем случае вектор $d\vec{\varphi}$ должен описывать как орбитальные, так и собственные вращения. Введем обычные соотношения:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{\upsilon}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}; \quad \vec{w} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad \vec{w}\,' = \frac{d\vec{\varphi}\,'}{dt'}. \tag{13}$$

Здесь вектор $d\vec{\varphi}$ имеет размерность длины. Определим псевдоскалярную величину ξ и псевдовектор $\vec{W}$:

$$\xi = d\tau/dt; \quad \vec{W} = \vec{V}\xi. \tag{14}$$

Тогда для $\vec{\upsilon}\,'$ и $\vec{w}\,'$ из (11) будет следовать:

$$\vec{\upsilon}\,' = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{V} \pm [\vec{V}, \vec{w}]}{1 - \vec{V}\vec{\upsilon}}; \quad \vec{w}\,' = \frac{\vec{w} - \vec{W} \mp [\vec{V}, \vec{\upsilon}]}{1 - \vec{V}\vec{\upsilon}}, \tag{15}$$

где при $\vec{\upsilon} = \vec{w} = 0$ из (15) получается $\vec{\upsilon}\,' = -\vec{V}$ и $\vec{w}\,' = -\vec{W}$, т.е. переход к обратным преобразованиям по-прежнему осуществляется заменой $\vec{V} \to -\vec{V}$. То же самое следует и из (4), так как сопряженный кватернион $\bar{p} = \alpha(1 + \vec{V}\vec{e})$ является обратным для $p = \alpha(1 - \vec{V}\cdot\vec{e})$, т.е. $p\bar{p} = 1$.

Преобразования же (7) приводят к

$$\vec{\upsilon}\,' = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{V} \mp i[\vec{V}, \vec{\upsilon}]}{1 - \vec{V}\vec{\upsilon}}. \tag{16}$$

По сути эти преобразования являются иной формой тех же связей, что и (15). Возводя равенство (16) в квадрат, можно получить обычные соотношения для преобразования модуля трехмерной скорости. Легко показать, что формулы (15) или (16) позволяют объяснять все классические эффекты специальной теории относительности: опыт Физо, явление аберрации света, эффект Доплера (если рассмотреть также преобразования волнового вектора) и т.д.

Выделим основные моменты работы. К преобразованиям (7), (11), (15), (16) можно подойти, лишь отказавшись от гипотезы о равенстве поперечных масштабов координат, которая возникла из попыток объяснения эксперимента Майкельсона. Появление комплексных координат не означает разрыва с действительностью, а является результатом используемого формализма и выражает необходимость принципиального привлечения к преобразованиям дополнительных характеристик, описывающих произвольное движение, таких, как: радиус-вектор и угол поворота, импульс и момент импульса, сила и момент силы, напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ и т.д.

Преобразованиям, подобным (9), должны удовлетворять любые физические характеристики, которые можно (или удобно) скомпоновать в соответствующий четырехвектор независимо от их природы — классической или квантовой.

Кватернионный подход не требует преобразования базиса, что облегчает переход к произвольным, в частности, криволинейным координатам. Формулы (7), (11) можно воспринимать не только как переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, но и как переход от одной пространственно-временной точки к другой точке в той же системе отсчета. Поэтому инфинитезимальная форма этих преобразований будет представлять соответствующие дифференциальные уравнения для входящих в них величин.

Наличие двух знаков перед векторным произведением во всех формулах ассоциируется с существованием правого и левого винта, правой и левой круговой поляризации и фактически отражает спиновые свойства у объектов любой природы, которые проявляются сугубо лишь в релятивистском случае [см. (12)].

В свою очередь, преобразования типа (1) соответствуют преобразованию спиноров. На кватернионном языке эти преобразования приводят к образованию симметричных тензоров наподобие тензора натяжений, деформаций или энергии-импульса (приложение 2).

Кватернион-октонионный формализм позволяет рассматривать также переходы во вращающуюся систему отсчета. Для этого следует заменить действительный параметр $\vec{V}$ в (9) на мнимый $i\vec{\Omega}$ соответственно угловой скорости вращающейся системы. Этим самым будет осуществляться переход от псевдоевклидова пространства в четырехмерное евклидово пространство. В результате равномерное вращение можно будет рассматривать как независимый случай инерциального движения.

В заключение отметим, что комплексно-векторную параметризацию группы Лоренца ввел Федоров Ф.И. [13]. Она также основана на объединении трехмерных перемещений и поворотов. Закон композиции вектор-параметра в [13] совпадает с формулами (16). Однако этот параметр сложно связан с относительной скоростью инерциальных систем отсчета. Это было вызвано стремлением не изменять традиционный вид преобразований Лоренца, вводя этот прием чисто формально.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим матричную реализацию гипердвойных единиц. Нетрудно убедиться, что двум независимым наборам единиц со свойствами (3) могут отвечать лишь четырехмерные гамма-матрицы Дирака в майорановском представлении:

$$\gamma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{П.1}$$

$$\gamma'_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma'_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma'_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{П.2}$$

$$\gamma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{П}.2)$$

В традиционной форме записи они удовлетворяют обычным соотношениям

$$\gamma_m \gamma_n = \delta_{mn} I + i\epsilon_{mnl}\gamma_l\,;\ \gamma'_m \gamma'_n = \delta_{mn} I - i\epsilon_{mnl}\gamma'_l\,. \qquad (\text{П}.3)$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера; ϵ_{mnl} — антисимметричная матрица с $\epsilon_{123} = 1$. Кроме этого, сами матрицы γ_m и γ'_m коммутируют между собой для любых m и n:

$$\gamma_m \gamma'_n - \gamma'_n \gamma_m = 0\,. \qquad (\text{П}.4)$$

В [14] аналогичные матрицы названы кватернионами правого и левого представления. Матрицы γ_m и γ'_m связаны между собой посредством метрического тензора плоского пространства-времени η или операторов пространственной P или временной T инверсии:

$$\gamma_m = -\eta\gamma'_m\eta = -P\gamma'_m P = P\gamma'_m T\,, \qquad (\text{П}.5)$$

где

$$\eta = -T = P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица лоренцевского преобразования примет вид:

$$\Lambda^+ = \gamma_\mu u_\mu = u_4 + \vec{\gamma}\,\vec{u}\,;\ \Lambda^- = \gamma'_\mu u_\mu = u_4 + \vec{\gamma}'\vec{u}\,, \qquad (\text{П}.6)$$

где $u_\mu = \alpha(\vec{V}/c,\ 1)$ и $\mu = 1, 2, 3, 4$, а $\alpha = (1 - \vec{V}^2/c^2)^{-1/2}$

В развернутой форме матрицу Λ^+ можно представить:

$$\Lambda^+ = \frac{\alpha}{c} \begin{pmatrix} 1 & -iV_z & iV_y & iV_x \\ iV_z & 1 & -iV_x & iV_y \\ -iV_y & iV_x & 1 & iV_z \\ -iV_x & -iV_y & -iV_z & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{П}.7)$$

Обратным преобразованиям будет соответствовать матрица:

$$(\Lambda^+)^{-1} = u_4 - \vec{\gamma}\,\vec{u}\,;\ (\Lambda^-)^{-1} = u_4 - \vec{\gamma}'\vec{u}\,, \qquad (\text{П}.8)$$

т.е. обычная замена $\vec{V} \to -\vec{V}$, как и отмечалось ранее. В результате преобразования Лоренца, совпадающие с (6), (7), принимают вид

$$X'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} X_\nu , \qquad \text{(П.9)}$$

причем $X_\mu = (\vec{X}, iX_0)$ и для удобства здесь принято соглашение — лишь для параметра u_μ считать u_4 действительной величиной, равной α. Для остальных четырехвекторов $X_4 = iX_0$ — чисто мнимая величина.

Переход к преобразованиям (9) осуществляется такой же заменой, т.е. $X_\mu \to Z_\mu = X_\mu + iY_\mu$.

В инвариантности преобразований (П.9) можно убедиться их непосредственной подстановкой в интервал (8). Легко получить также ко- и контрвариантную формы преобразований (П.9). Так,

$$\Lambda = u^\mu \gamma_\mu = u_0 - \vec{\gamma}\,\vec{u}\,; \quad \bar{\Lambda} = u_\mu \gamma^\mu = u_0 + \vec{\gamma}\,\vec{u}\,,$$

причем как обычно

$$u_0 = u^0;\ u_k = -u^k;\ \gamma_0 = \gamma^0 = I;\ \gamma_k = -\gamma^k,$$
$$k = 1, 2, 3\,;\ \mu = 0, 1, 2, 3\,.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим в развернутом виде преобразования (1). Пусть $q = X_0 + \vec{X}\vec{e}$ и $p = A_0 + \vec{A}\cdot\vec{e}$, тогда преобразования $q' = pq\bar{p}$ принимают вид:

$$X'_0 = (A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2)X_0,$$
$$X'_1 = (A_0^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_1^2)X_1 - 2(A_1A_2 + iA_0A_3)X_2 - 2(A_1A_3 - iA_0A_2)X_3,$$
$$X'_2 = -2(A_1A_2 - iA_0A_3)X_1 + (A_0^2 + A_1^2 + A_3^2 - A_2^2)X_2 - 2(A_2A_3 + iA_0A_1)X_3,$$
$$X'_3 = -2(A_1A_3 - iA_0A_2)X_1 - 2(A_2A_3 - iA_0A_1)X_2 + (A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 - A_3^2)X_3$$

или

$$X'_\mu = T_{\mu\nu} X_\nu ,$$

где

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \sigma_{kj} \end{pmatrix}$$

и μ, ν = 0, 1, 2, 3, а k, j = 1, 2, 3. При A_0 = 0 тензор σ_{kj} с точностью до знака совпадает с традиционными в физике симметричными тензорами натяжений и т.д.

Список литературы

1. Казанова Г. Векторная алгебра. — М.: Мир, 1979.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973.
3. Rastall P. — Rev. Mod. Phys., 1964, vol. 36, № 3, p. 820 — 833.
4. Imaeda K. — Nuovo Cim., 1979, vol. 50B, № 2, p. 271; Teli M.T. — Phys. Lett., 1980, vol. 75A, № 6, p. 460.
5. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. — М. — Л.: ГТТИ, 1933.
6. Ланцош К. Вариационные принципы механики. — М.: Мир, 1965.
7. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
8. Буринский А.Я. Микрогеон с метрикой Керра. — Изв. вузов. Физика, 1974, № 8, с. 21.
9. Страховский Г., Успенский А. Экспериментальная проверка теории относительности. — УФН, 1965, т. 86, с. 421.
10. McCarthy Robert L. — Amer. J. Phys., 1977, vol. 45, № 1, p. 56.
11. Мёллер К. Успехи и ограниченность эйнштейновской теории относительности и гравитации. — В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. — М.: Мир, 1982.
12. Принцип относительности. — М.: Атомиздат, 1973.
13. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. — М.: Наука, 1979.
14. Polubar'nov I.V. Matrix and analytic representations of quaternions and octonions. I: Препринт ОИЯИ, Е-11169. — Дубна, 1978

Редактор Л.И. Кирюхина
Технический редактор Н.А. Малькова
Корректоры В.П. Горячева, М.С. Курзова

Т-07538. 12.03.85. Формат 60x90/16. Уч.-изд.л. 0,5
Тираж 136. Индекс 3624. Заказ 134

Отпечатано в ИАЭ

10 коп.

Индекс 3624

Препринт ИАЭ-4159/1. М., 1985