

Франц Герман
(franz.h-n@yandex.ru)

Геометрия фундаментальных законов

«Пустое пространство кажется не очень перспективным объектом для исследования, однако именно в нём скрыт ключ к полному пониманию существующих в природе взаимодействий...» [6]

(П. Девис)

«Наука описывает не то, что есть за природой, а то, что есть в природе» [59].

(Ф. Каройхази)

Эта заметка была написана по материалам приложения [1] с очень небольшими дополнениями и изменениями к изложенному в книге материалу.

Согласно теории Большого Взрыва (БВ) наша Вселенная расширяется. Причём каждый день объём Вселенной прирастает на 10^{18} **кубических световых лет** ([6], стр. 222). Не слабый такой кубик. Откуда же берётся это пространство? Складывается представление, что пространство сродни резине – растягивается и всё время деформируется, но мы этого не замечаем. Сегодняшняя физическая наука продвинулась так далеко, что мы можем заглянуть (теоретически) в самые ранние времена Вселенной, когда она только только зарождалась. Согласно стандартной модели (СМ) законы квантовой механики начинают работать в физическом мире начиная с момента, когда нашей Вселенной было всего 10^{-32} секунды [6]. А ещё раньше начиная с 10^{-43} секунды (Эра Планка) всё пространство было заполнено неким «кварковым супом», где могли образовываться какие-то фантастические элементарные частицы. Что там было мы никогда не узнаем и не сможем смоделировать, а можем только полагаться на выводы современной науки. Наука предполагает, что именно в этот промежуток времени, т. е. с 10^{-43} первой секунды по 10^{-32} этой же самой секунды и появилось (организовалось) само пространство-время, как мы понимаем его сегодня. Т. е., можно сказать, что сначала начали работать какие-то пространственные законы, а точнее геометрические, а потом уже – физические. Пол Девис говорит ([6], стр. 223), что в это время мог произойти «квантовый скачок» ... «своего рода туннельный процесс». Физики называют такой процесс фазовый переход. И далее: «... в случае спонтанного возникновения квантовой Вселенной «из ничего» наша интуиция достигает предела своих возможностей. Один конец туннеля представляет собой физическую Вселенную в пространстве и времени, которая попадает туда путём квантового туннелирования «из ничего».

Следовательно, другой конец туннеля представляет собой это самое Ничто! Возможно, лучше было бы сказать, что у туннеля имеется лишь один конец, а второго просто «не существует». С точки зрения математика такое пространство (туннель с одним входом-выходом) является ничем иным, как бутылкой Клейна. А бутылка Клейна топологически эквивалентна двум проективным плоскостям, соединённым трубкой (тоннелем) [18]. Непонятно, что представляет собой такая геометрия. Наверное, здесь уместно было бы говорить о метагеометрии n измерений (Рис. 1).

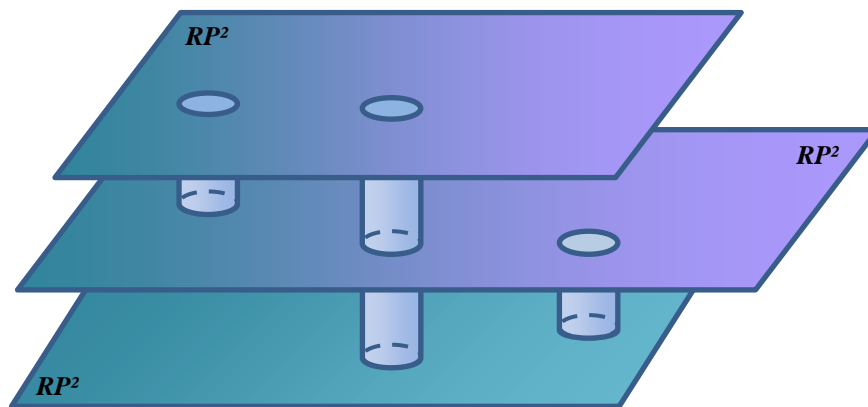


Рис. 1

Здесь показан условный вид такого предпространства из трёх плоскостей.

Кстати, наверно можно говорить о некоем новом топологическом многообразии. Напомним, что проективная плоскость сама по себе – это замкнутое многообразие. А у нас – **три** таких плоскости, соединённые попарно **тремя** трубками. Вполне независимая структура, которую можно исследовать, как самостоятельный объект – **туннельная сфера** предгеометрии. Можно даже предположить, что где-то в пространстве сохранились такие реликтовые структуры. Но это другая задача.

Пол Девис предполагает, что в следующий момент могли свернуться лишние измерения. Соединительные трубки между проективными плоскостями, как раз подошли бы для этой роли (свёрнутых измерений). Т. о., и родилось проективное пространство. На языке математики это можно было бы записать в виде тождества:

$$K^2 \equiv RP^2 \cup Z^2 \cup RP^2,$$

где K^2 - обозначение бутылки Клейна, RP^2 - принятое обозначение проективной плоскости, а Z^2 - цилиндр (тоннель - соединительная трубка).

Итак, появилось пространство, «одетое» в проективную геометрию. Мы знаем, что самой «свободной» (всего один инвариант) геометрией является как раз проективная геометрия [7], а уж из неё потом начинают появляться («выкристаллизовываться») и другие геометрии. Именно поэтому наш взор будет направлен сначала на проективную геометрию, а конкретно – на проективную плоскость. Кроме того, проективная плоскость – это замкнутое многообразие, а в рамках теории БВ наш мир родился из «ложного» вакуума, где расширились пузырьки (замкнутые многообразия) истинного вакуума [6] и, может быть, «вся наблюдаемая Вселенная содержится в одном таком пузыре» ([6], стр. 217). Проективная геометрия настолько первозданна, что в ней не существует таких понятий, как расстояние между двумя точками или угол между двумя прямыми. Основным и единственным инвариантом проективной геометрии является сложное отношение четырёх точек на прямой. Мы говорили об этом в четвёртой части книги [1] (стр. 117-118). Существует формула для вычисления сложного отношения четырёх точек:

$$w = (AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad (1)$$

где a_i - координаты точки A . Аналогично и для точек B , C и D . Напомним, что сложное отношение можно вычислить различными шестью способами (в зависимости от расположения точек в формуле (1)), и эти значения образуют неабелеву группу 6-го порядка.

Коль в формуле стоят координаты точек, значит на проективной плоскости можно ввести и координатную систему. Координаты проективной геометрии называются однородными. Ещё одна особенность этой геометрии заключается в том, что на плоскости не существует нулевой точки, т. е. точки с координатами, значения которых одновременно равны нулю. При вводе координатной системы базовой фигурой является четырёхвершинник (Рис. 2).

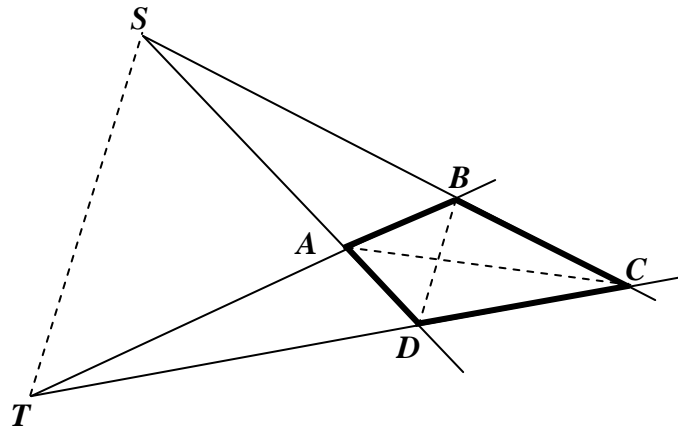


Рис. 2

В проективной геометрии принято говорить не четырёхугольник, а четырёхвершинник (понятие угла, как мы уже упомянули, смысла не имеет).

Четырёхвершинник $ABCD$ называется полным если даны стороны, соединяющие точки пересечения противоположных сторон и стороны, соединяющие противоположные вершины четырёхвершинника. В нашем случае это стороны AC , BD и ST (их ещё называют диагоналями четырёхвершинника). Понятия параллельности и перпендикулярности двух прямых тоже отсутствует в проективной геометрии. Именно поэтому две любые прямые проективной плоскости обязательно пересекаются. Точкой пересечения может быть обыкновенная точка плоскости, а также и бесконечно удалённая точка. Мы не будем здесь пересказывать основные положения проективной геометрии и отсылаем читателя к классической литературе, например [8]. Однако, надо отметить ещё и такую особенность этой геометрии. Здесь важное значение имеет, так называемый, принцип двойственности. Т. е. абсолютное равноправие точек и прямых. Не важно относительно чего (точек или прямых) делается то или иное высказывание. Например все свойства сложного отношения четырёх точек на одной прямой можно рассматривать и как сложное отношение четырёх прямых, проходящих через одну точку. Принцип двойственности очень хорошо иллюстрирует, например, аналитическое выражение уравнения прямой на проективной плоскости.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \quad (2)$$

Глядя на это уравнение можно говорить, что точка $X(x_1 : x_2 : x_3)$ принадлежит прямой $a(a_1 : a_2 : a_3)$, но можно и сказать, что точка $A(a_1 : a_2 : a_3)$ принадлежит прямой $x(x_1 : x_2 : x_3)$.

Но возвращаемся к нашему четырёхвершиннику. Если даны четыре точки проективной плоскости, любые три из которых не лежат на одной прямой, причём – точки с координатами $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$ и $D(1:1:1)$, то говорят, что на плоскости задан проективный репер $R\{A, B, C, D\}$. Определим в рамках нашего репера точки пересечения диагоналей (диагональные точки): $K \equiv AC \cap BD$, $L \equiv AC \cap ST$ и $M \equiv ST \cap BD$.

Покажем несколько простейших (числовых, т. е. связанных с числами) теорем проективной геометрии. Но сначала дадим одно определение:

Определение: Если сложное отношение четырёх точек равно -1 , то оно называется гармоническим.

Теорема 1. (о гармоническом отношении)

Если дан проективный репер $R\{A, B, C, D\}$ и определены диагональные точки K , L и M , то

$$(TS, LM) = (LK, AC) = (MK, BD) = -1 \quad (3)$$

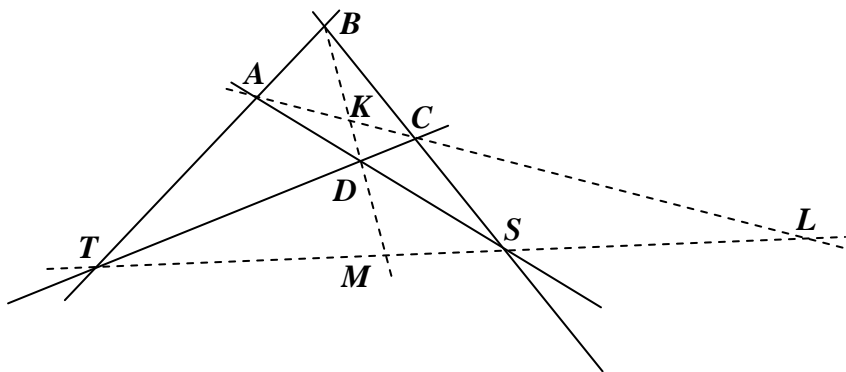


Рис. 3

Теорема 2. (о детерминанте диагональных точек)

Абсолютный детерминант диагональных точек равен 4.

$$|\det(KLM)| = 4 \quad (4)$$

Теорема 3. (о пяти точках на проективной прямой)

Если на проективной прямой даны пять точек A, B, C, D и E (Рис 4), то справедливо равенство:

$$(AB, CD) \cdot (AB, DE) \cdot (AB, EC) = 1. \quad (5)$$

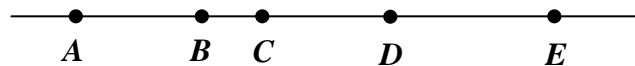


Рис. 4

Мы специально показали здесь (без доказательства) несколько простейших теорем проективной геометрии, чтобы у читателя не складывалось впечатление, что данная геометрия уж совсем безнадёжна и в ней нет места аналитическим методам. Напомним, что в нашей любимой планиметрии (на евклидовой плоскости) тоже существуют числовые теоремы. Например, теоремы Чевы, Менелая и Жергона.

Но не будем отвлекаться. Мы ведь хотели поговорить о геометрии Мироздания в первые мгновения его рождения, когда не могло быть ещё науки о сегодняшнем естествознании.

Итак, Мироздание представляло собой некий кварковый суп, где кроме как о проективной геометрии ни о какой другой геометрии речи быть и не могло. Проективные преобразования превращали точки в точки, а прямые – в прямые. А по большому счёту идеи геометрических точек и прямых были абсолютно эквивалентны (мы помним проективный принцип двойственности). Но суп начал остывать и в нём стали появляться островки кристаллизации. Что же это за кристаллики такие с точки зрения проективной геометрии?

Дадим ещё одно определение.

Определение: Абсолютом называется фигура, которая остаётся неизменной при проективных преобразованиях.

Что можно взять в качестве простейшего Абсолюта, простейшего островка кристаллизации? Разумеется произвольную точку (или произвольную прямую, с точки зрения принципа двойственности – это равносильно). Для более наглядного представления пусть это будет прямая. Т. е., на проективной плоскости существует Абсолют в виде прямой,

которая остаётся инвариантной (неизменной) при проективных преобразованиях этой плоскости. Кстати, вводя различные Абсолюты можно получать из проективной геометрии различные другие геометрии. Это и геометрия Лобачевского, геометрия Римана, и, так любимая физиками, геометрия Минковского, и, конечно же, геометрия Эвклида, которую мы изучаем в школе. Но вернёмся к геометрии, где в качестве Абсолюта выбрана прямая линия.

Итак, с введением этого Абсолюта проективная геометрия превращается уже в другую геометрию. Что же это за геометрия? Математики знают, что такая геометрия, где инвариантом преобразований является прямая, называется аффинной (термин «аффинный» ввёл Л. Эйлер от латинского слова «affinitas» - родство). Аффинная геометрия – это большой раздел классической аналитической геометрии (см., например, [9]). Для нас важно то, что в аффинной геометрии появляется очень интересный инвариант, которого нет в проективной геометрии, – параллельность. Т. е. в аффинной геометрии уже существуют параллельные прямые. А это значит, что можно говорить о таком понятии, как пространственная решётка. Но об этом позже.

Одной из интересных теорем аффинной геометрии (почему-то редко упоминаемой в математической литературе) является теорема Пика ([10], стр. 300). Напомним эту теорему (мы говорили о ней в третьей части [1]). Площадь многоугольника, вершины которого расположены в узлах целочисленной решётки, можно вычислить по формуле:

$$S = U_B + \frac{U_G}{2} - 1, \quad (6)$$

где U_B – число узлов решётки, которые находятся внутри данного многоугольника, U_G – число узлов решётки, которые попали на границу данного многоугольника.

Преобразуем формулу (6).

$$U_G + 2U_B - 2S = 2. \quad (7)$$

Введя обозначения: $U_G = B$, $2U_B = G$, $2S = P$ получаем

$$B + G - P = 2. \quad (8)$$

Не правда ли знакомая формула? Мы получили знаменитую формулу Эйлера для многогранников, топологически эквивалентных сфере. Здесь B – число вершин, G – число граней и P – число рёбер многогранника.

Заметим, что формула Эйлера тоже относится к аффинной геометрии ([11], стр. 506).

Очевидно, формулы (6) и (8) нельзя назвать изоморфными, т. к. обозначения можно было бы ввести и другим способом. Например, $U_G = G$, $2U_B = B$ и $2S = P$. Мы снова получили бы формулу (8), но новые характеристики отвечали бы уже другому многограннику (двойственному первому). Так вместо куба получился бы октаэдр, а вместо додекаэдра – икосаэдр и наоборот. Но суть не в этом. Преобразовывая формулы мы хотели подчеркнуть косвенную связь между различными геометриями. Мы только только получили из проективной геометрии аффинную, а в её теоремах уже есть намёк и на евклидову геометрию. Вообще говоря, формула (8) является частным случаем другой формулы и относится в общем случае к топологии. Для интереса сначала продемонстрируем пример соответствия формул (6) и (8), а потом поговорим об общей топологической формуле. На Рис. 4 показан простейший многогранник, для которого справедлива формула (8) и соответствующий ему многоугольник, рассчитанный по формуле Пика (6). Очевидно, что существует бесконечно много топологически эквивалентных многогранников и топологически эквивалентных многоугольников. Но можно подчеркнуть такую особенность. Топологически эквивалентные многогранники имеют различные объёмы, а топологически эквивалентные многоугольники имеют одинаковую площадь

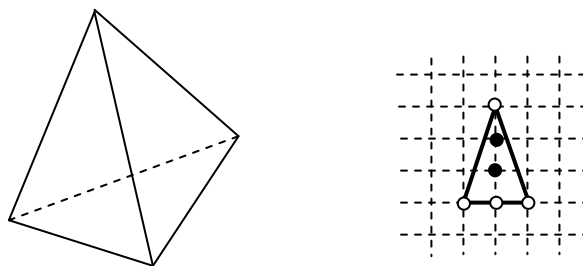


Рис. 5

Итак, рассмотрим обобщённую формулу Эйлера.

$$B + G - P = \chi. \quad (9)$$

В зависимости от того, чему равно число χ , мы получаем топологически новый тип многообразия. Существует формула ([1], стр. 95), при помощи которой тоже можно вычислить площадь многоугольника, вершины которого расположены в **междоузлиях** целочисленной решётке (автор её – Ваш покорный слуга Ф. Г.).

$$S = \bar{U}_B + \frac{\bar{U}_\Gamma}{2}. \quad (10)$$

Преобразовав последнюю формулу точно так же, как мы делали это с формулой (6), и введя обозначения $\bar{U}_\Gamma = B$, $2\bar{U}_B = \Gamma$, $2S = P$ получаем ещё один частный случай формулы Эйлера.

$$B + \Gamma - P = 0. \quad (11)$$

Т. е. характеристическое число $\chi = 0$. А таким характеристическим числом обладают фигуры, расположенные либо на торе (фигура, топологически изоморфная бублику), либо на листе Мёбиуса [5], либо на бутылке Клейна.

Сделаем небольшую паузу. Как известно ([2], стр. 48), лист Мёбиуса можно получить из тора используя специальные топологические преобразования. Также известно ([12], стр. 129; [3], стр. 188), что одной из моделей проективной плоскости является сфера с дыркой, край которой гомеоморфен окружности, которая заклеена листом Мёбиуса (край листа Мёбиуса тоже гомеоморфен окружности). Т. о., с одной стороны мы видим косвенную связь с геометрией Эвклида: и тор и лист Мёбиуса – фигуры, принадлежащие этой геометрии. С другой стороны - лист Мёбиуса можно рассматривать как часть проективной плоскости. Т. е. проективная геометрия продолжает о себе напоминать. Мы не будем здесь углубляться в вопрос преобразования формул одной геометрии (поверхности) в другую – это тема специального исследования. Но приведём наглядный пример соответствия формул (10) и (11).

Пусть имеем многоугольник на целочисленной решётке, площадь которого можно вычислить по формуле (10) (Рис. 6).

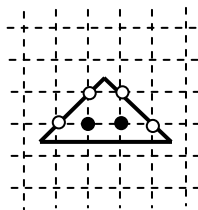


Рис. 6

Т. е. имеем треугольник, вершины которого расположены в междоузлиях целочисленной решётки. На сторонах этого треугольника имеем 4 точки (узла решётки), а внутри треугольника – 2 узла. Для вычисления его площади подходит формула (10). После преобразования в формулу (11) имеем: $\bar{U}_\Gamma = B = 4$, $2\bar{U}_B = \Gamma = 4$, $2S = P = 8$. Чтобы использовать формулу

(9) для конкретной поверхности, надо для этой поверхности сделать сначала триангуляцию. Триангуляция – это разбиение поверхности на «криволинейные» многоугольники ([5], стр. 22). Покажем пример триангуляции на торе с четырьмя точками (вершинами), четырьмя гранями и восьмью рёбрами. Для этого удобно использовать топологическую схему поверхности.

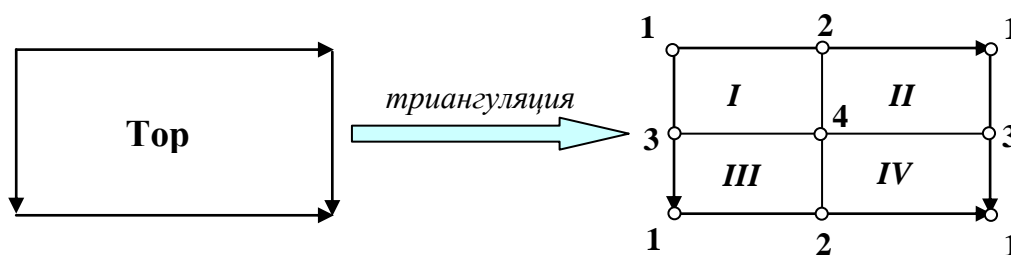


Рис. 7

Одинаковыми арабскими числами обозначены тождественные точки поверхности. Римскими числами обозначены грани после триангуляции поверхности. Естественный вид тора после триангуляции показан на Рис. 8. Т. е. получаем такой многогранник (криволинейный), топологическая характеристика которого вычисляется по формуле (11).

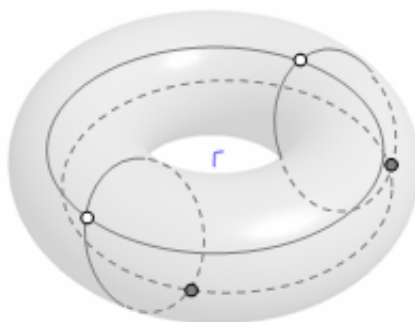


Рис. 8

Действительно, этот многогранник имеет 4 вершины (точки на торе), 8 рёбер (дуги окружностей, соединяющие вершины) и 4 грани (части, на которые распадается тор после того как мы его разрежем по всем дугам).

В принципе формулы (6) и (10) можно обобщить как и формулу Эйлера, введя топологическую характеристику расположения многоугольника на целочисленной решётке в виде числа η .

$$B + \frac{\Gamma}{2} - S = \eta. \quad (12)$$

Здесь B – число узлов решётки внутри многоугольника, G – число узлов решётки на сторонах многоугольника, S – площадь многоугольника. Если $\eta = 1$, то вершины многоугольника находятся в узлах решётки, если $\eta = 0$, то – в междоузлиях.

Но вернёмся к нашему исследуемому пространству.

Итак, мы рассмотрели случай возможного начала кристаллизации пространства Мироздания и увидели, что проективная геометрия превращается в геометрию аффинную во время такой кристаллизации. В аффинной геометрии, как мы видели, уже есть проблески геометрии Эвклида. А евклидово пространство как раз и является сегодняшним нашим окружением и именно это пространство мы хотим получить для дальнейшего рассмотрения в нём законов физики.

Говоря о координатах точек мы нигде не отмечали, что числа используются только действительные. На самом деле, если мы будем говорить о координатах или других числовых конструкциях (например, сложном отношении) используя комплексные числа, то ничего не изменится, т. к. действительные числа являются частью чисел комплексных. Как это ни фантастично покажется, но чтобы процесс геометрической кристаллизации (а Мироздание продолжает остывать) дошёл до Эвклидовой геометрии как раз надо использовать комплексные числа. В качестве следующего шага используем Абсолют в виде той же самой прямой, но с одним условием. А именно: **две точки с комплексно сопряжёнными координатами на этой прямой тоже должны быть инвариантными**, т. е. принадлежать выбранному Абсолюту. В этом случае проективная геометрия становится эвклидовой [7], где не только есть инвариант параллельности, но и другой важный инвариант – перпендикулярность. Условно такое преобразование можно показать в таком виде (Рис. 9).

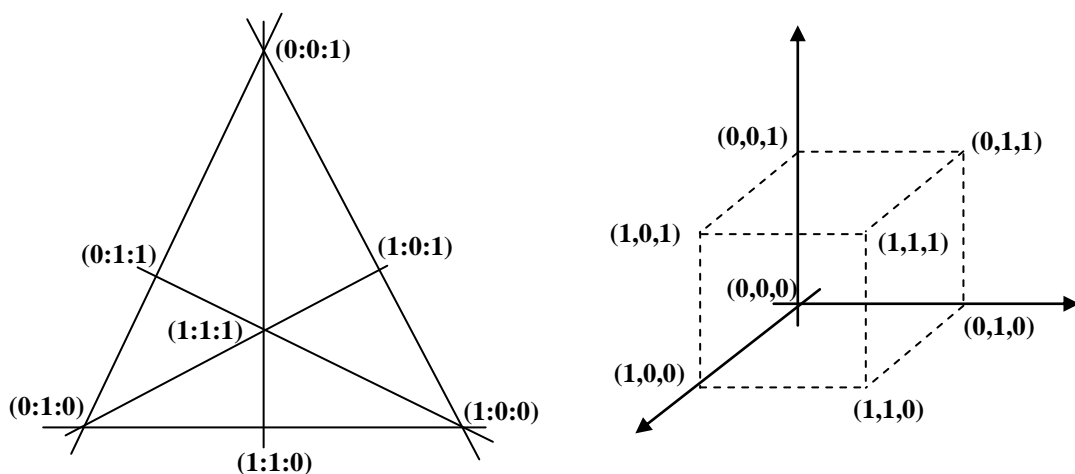


Рис. 9

На левой части рисунка показан проективный репер, а справа показана ячейка евклидова пространства. Мы помним, что на проективной плоскости не существует нулевой точки. Можно записать такое соответствие: $(x_1 : x_2 : x_3) \Rightarrow (X, Y, Z)$, где для каждой точки проективной плоскости есть свой образ в евклидовом пространстве. С появлением Эвклидовой геометрии, наверно, есть смысл поговорить о пространственной решётке и упаковке самого пространства. Мы сделаем это чуть позже. А сейчас обратимся к физике.

Итак, можем считать, что наступил момент 10^{-32} в жизни Мироздания и теперь чтобы понять дальнейшую жизнь Вселенной уже достаточно законов современной физики, т. е. СМ.

Среди физиков есть мнение [13], что главной формулой СМ является формула

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (12)$$

Геометрия этой формулы понятна нам со школьной скамьи в качестве теоремы Пифагора, хотя при этом мы и не говорили ни о какой физике.

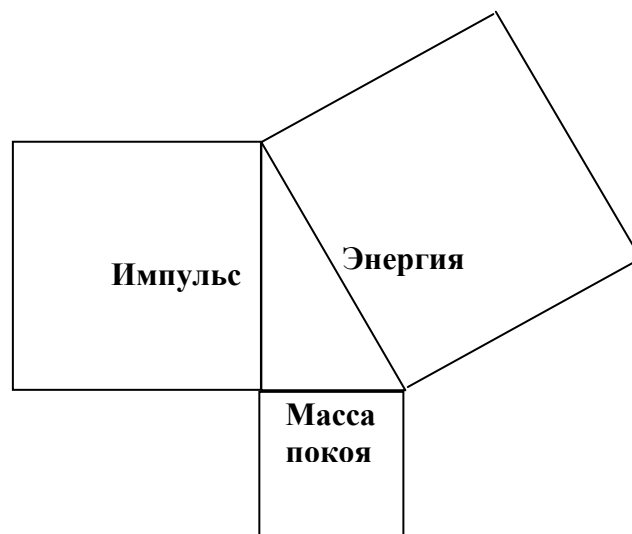


Рис. 10

Но если смотреть, как говорят, в корень, то не менее главной в физике можно назвать и другую формулу (13).

$$E = m \cdot c^2. \quad (13)$$

Попробуем разобраться, а какова геометрия этой последней формулы. Начнём с того, что вспомним теорему о касательной и секущей: квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.

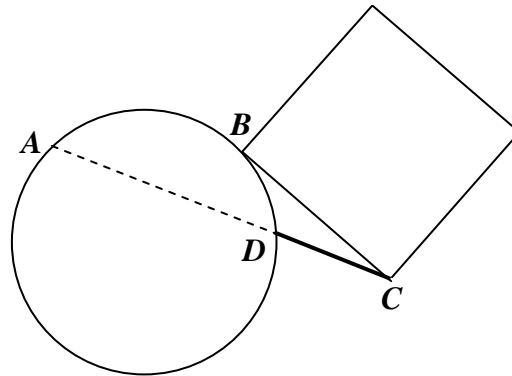


Рис. 11

Введём обозначения: $BC = c$, $AC = E$, $DC = M$. Тогда можем записать вышеизложенную теорему в виде формулы.

$$E \cdot M = c^2 \quad (14)$$

Мы специально выбрали такие обозначения, чтобы формула (14) немного походила на формулу (13). Переписав формулу в таком виде: $E = \frac{1}{M} \cdot c^2$ замечаем, что она стала ещё больше походить на формулу (13). С геометрической точки зрения величина $\frac{1}{M}$ - это тоже какой-то отрезок.

Поэтому введя обозначение $\frac{1}{M} = m$ окончательно получаем: $E = m \cdot c^2$. Т. о. мы добились полного внешнего совпадения записи физического закона и геометрической теоремы. А теперь давайте разбираться. Глядя на Рис. 9 можно сказать, что физики спокойно относятся к геометрическим иллюстрациям (рисунок взят из книги по физике [13]). Во первых поговорим об энергии. Мы привыкли к ней со школьных лет. Есть энергия потенциальная, есть кинетическая и много других, но пощупать её нельзя. Нельзя увидеть, услышать, понюхать. Мы же не говорим: «Ах, как пахнет эта энергия». Энергия – это физический фантом ([6], стр. 77), абстрактное понятие. Но введя это абстрактное понятие стало удобно объяснять много других физических понятий. Поэтому представить энергию отрезком – это нормально. В формуле (12) есть ещё масса. И она тоже представлена отрезком. В формуле (13) тоже есть масса и мы показали её отрезком $DC =$

М. Но где отрезок $\frac{1}{M} = m$? Чтобы увидеть отрезок, по величине обратный данному, надо ввести масштабную единицу.

Рассмотрим полуокружность (Рис. 12).

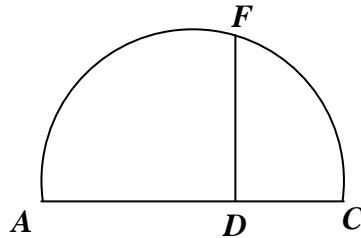


Рис. 12

Из произвольной точки *D* диаметра данной полуокружности восставим единичный перпендикуляр $DF = 1$. Пусть длина отрезка $DC = M$. Тогда, рассмотрев подобные треугольники AFD и CFD находим, что $AD = \frac{1}{M}$.

Перерисуем Рис. 11.

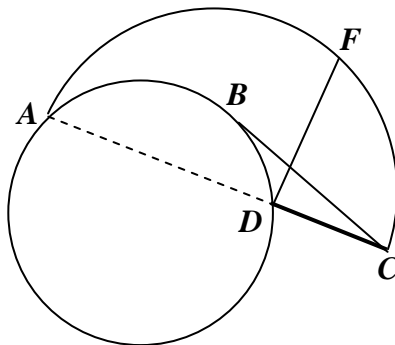


Рис. 13

Теперь, с вводом масштабной единицы, можем сказать, что **произведение квадрата касательной, на внутреннюю часть секущей, равно длине всей секущей**. А в свете принятых обозначений это можно записать, как формулу $E = m \cdot c^2$. Чтобы не усложнять Рис. 13 мы не стали здесь показывать квадрат касательной.

Проведём небольшое исследование нового геометрического закона с точки зрения физики. Введём обозначение для масштабной единицы: $I = 1$. В физических законах ничего подобного нет (пока нет), но нам без такого отрезка не обойтись. Конечно же, надо понимать, что физический закон невозможно просто получить из геометрии. Но коль физики почему-то

начали использовать геометрическую наглядность своих законов, то почему бы нам и не продолжить это занятие.

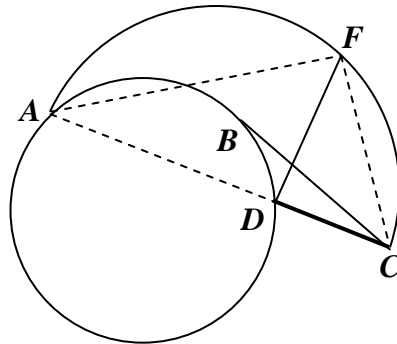


Рис. 14

Закон масштабной единицы можем записать в таком виде:

$$1 = \frac{m \cdot M}{I^2}. \quad (15)$$

Не правда ли, такая запись напоминает и закон Кулона, и закон всемирного тяготения Ньютона.

Очевидно, что $M^2 + I^2 = CF^2$. Но по теореме о касательной и секущей можем записать: $c^2 = (m + M) \cdot M = m \cdot M + M^2 = I^2 + M^2$, т. е. получаем, что отрезок $CF = c$. А окончательно можем записать в виде геометрофизического соотношения:

$$M^2 + I^2 = c^2. \quad (16)$$

Рассмотрим треугольник AFC . Здесь имеем такое соотношение $AF^2 + CF^2 = AC^2$. Или в принятых обозначениях: $AF^2 + c^2 = E^2$. Но с другой стороны $AF^2 = m^2 + I^2$. И окончательно:

$$m^2 + I^2 + c^2 = E^2. \quad (17)$$

Получили ещё один геометрический (псевдофизический) закон, который можно наглядно представить уже в трёх измерениях в виде ортогонального параллелепипеда, диагональ которого будет символизировать энергию.

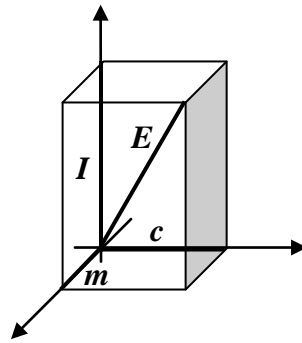


Рис. 15

Всё вышеизложенное позволяет построить нам некий обобщающий закон в виде квадратного уравнения. Действительно, нам известно, что $m \cdot M = I^2$. Кроме того мы имеем $m + M = E$. Отсюда можем записать:

$$\overline{M}^2 - E \cdot \overline{M} + I^2 = 0. \quad (18)$$

Будем называть это уравнение **обобщённым уравнением массы**. Вычисляя корни этого уравнения получаем два решения: $\overline{M}_1 = m$ и $\overline{M}_2 = M$. m - символизирует массу покоя. А что такое M ? Может быть – это релятивистская масса (с увеличением скорости растёт и масса покоя), а может быть это масса тёмной материи? В рамках нашего исследования не стоит над этим ломать голову.

А как можно показать на наших диаграммах закон, представленный формулой (12)?

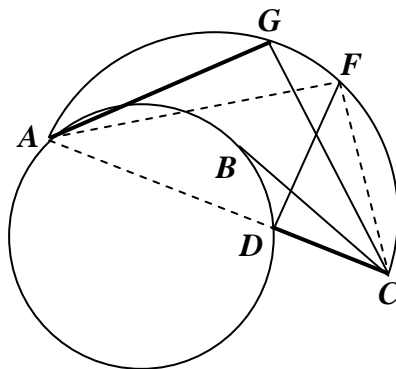


Рис. 16

Отложим на полуокружности отрезок $AG = AD$. Тогда отрезок CG будет символизировать импульс, AG – массу покоя, а AC – энергию. А как можно

увидеть на нашей диаграмме время? Освободим Рис. 16 от лишних деталей и сделаем небольшие дополнения.

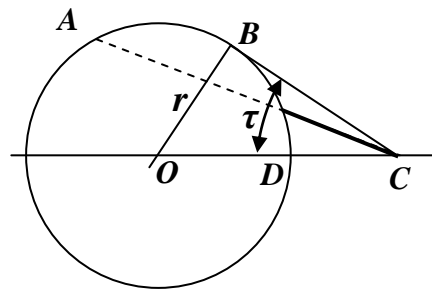


Рис. 17

Центр окружности обозначим через O , через точки O и C проведём прямую OC , отрезок OB обозначим через r , а угол BCO - через τ . На наших диаграммах и масса, и энергия, и скорость представлены отрезками. Чтобы представить время надо рассмотреть отношение длины к скорости. Поэтому отношение $\frac{OB}{BC}$ и можно рассматривать как время. Приняв для времени традиционное обозначение через букву t , можем записать, что $Tg(\tau)=t$. В физике обозначать какие-то величины через тригонометрические выражения – не новость. Например, через $Cos(\varphi)=P$ обозначают активную мощность в электрических сетях переменного тока.

С вводом времени в наших диаграммах появляется динамика. Пусть точка C передвинется в новую точку C^* .

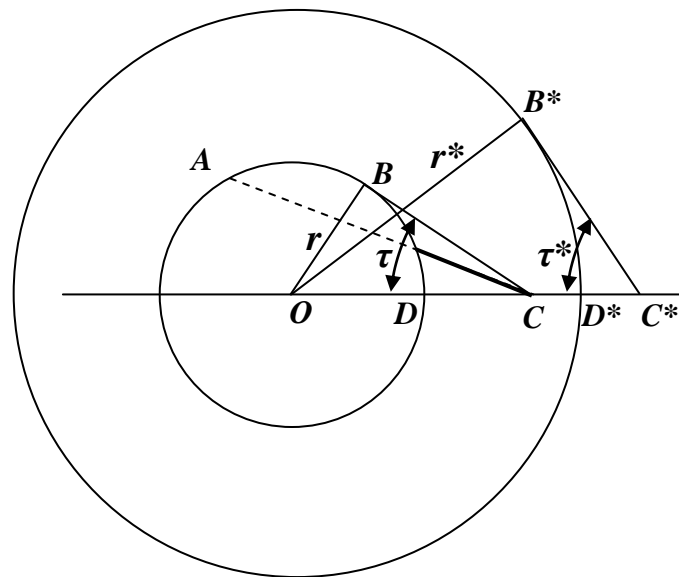


Рис 18

Т. к. скорость света должна быть постоянной ($BC = B^*C^* = c$ - скорость света), то радиус OB должен удлиниться до $OB^* = r^*$. А угол τ должен увеличиться до τ^* . По построению будем иметь угол $\tau < 90^\circ$. Возможно, что с точки зрения физики – это не правильно, хотя не исключено, что время жизни Вселенной ограничено. Также можно продолжить нашу фантазию и считать, что расстоянием r ограничивается величиной радиуса наблюдаемой Вселенной, а отрезок OC характеризует размер всей Вселенной (по теории БВ Вселенная должна расширяться). Оставим наши физико-геометрические законы и вернёмся к пространству.

Генрих. Шерк - профессор «главной школы» в Бремене [14], ученик К. Якоби по Кёнигсбергу - знаменит тем, что он открыл единственную **минимальную поверхность переноса** [15]. Т. е. поверхность Шерка может транслировать себя на всё пространство. Уравнение этой поверхности имеет вид $Z = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{\cos(k \cdot Y)}{\cos(k \cdot X)}\right)$ (это одно из возможных решений уравнения Лагранжа – Эйлера). Здесь X, Y, Z – декартовы координаты. Мы будем рассматривать простейшую поверхность Шерка при $k = 1$, т. е. поверхность $Z = \ln\left(\frac{\cos(Y)}{\cos(X)}\right)$. Компьютерные возможности сегодня позволяют нам иметь наглядное представление об этой поверхности (Рис. 19).

Одно из негласных правил окружающего нас мира говорит, что если в математической науке существует интересный и, тем более, уникальный объект, то он обязательно должен как-то проявиться в природе.

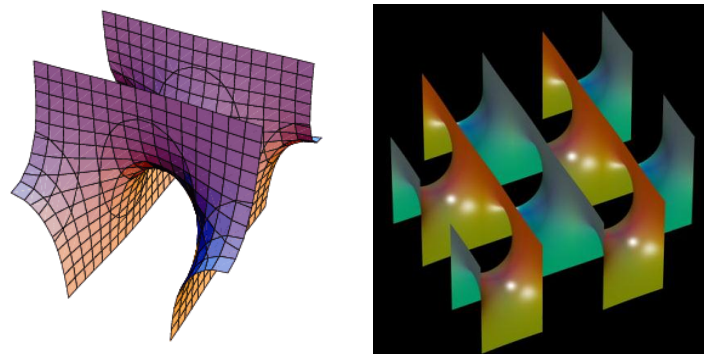


Рис 19

А поверхность Шерка уникальна, как минимум с трёх сторон. Во-первых её уравнение довольно просто, во вторых – это минимальная поверхность (а в природе существует принцип наименьшего действия [4], который описывается опять же уравнением Лагранжа - Эйлера) и, наконец, в третьих – это единственная транслируемая поверхность. Как уже было

сказано, - **поверхность переноса**. Поговорим об этой поверхности немного подробнее. Поверхность Шерка будем рассматривать как некий след от проективной геометрии в евклидову. Для этого введём закон соответствия или правила соответствия для четырёх точек евклидовой плоскости и, соответственно, четырёх точек проективной плоскости. Сразу оговоримся, что это не единственный способ и правила соответствия можно вводить по-разному. Мы рассматриваем координатные правила соответствия.

$$a_1 - a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 - c_1 = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad b_1 - b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad d_2 - d_1 = - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad (19)$$

Формулы (19) циклично зависимы в соответствии с такой схемой:

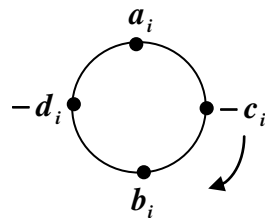


Рис. 20

Будем считать, что в каждой формуле (19) слева стоят декартовы координаты, а справа – проективные. Пусть для определённости $a_1 - a_2 = a < c = c_1 - c_2$, а $d_1 - d_2 = d < b = b_1 - b_2$. Тогда можем считать, что a и c , и d и b – это катет и гипотенуза некоторых прямоугольных треугольников соответственно.

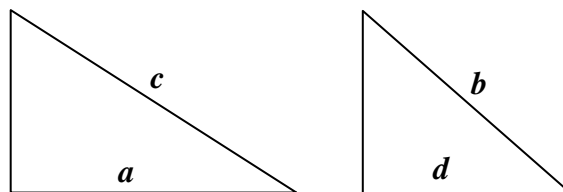


Рис. 21

Косинус в самом общем случае можно рассматривать как отношение двух чисел, т. е. имеем: $\text{Cos}(Y) = \frac{a}{c}$ и $\text{Cos}(X) = \frac{d}{b}$. Тогда отношение этих косинусов представляет собой некое отношение отношений.

Рассмотрим на проективной плоскости прямую m , описываемую уравнением $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$. Пусть точка A имеет координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, две, из которых, нам известны: $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$. Тогда находя

третью координату по формуле $x_3 = -\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_3}$ можно утверждать, что точка A принадлежит прямой m . Аналогично рассматриваются и точки B , C и D , т. е. все эти точки лежат на одной прямой. В этом случае отношение косинусов – это ни что иное, как сложное отношение четырех точек прямой m .

$$\frac{\text{Cos}(Y)}{\text{Cos}(X)} = (AB, CD). \quad (20)$$

Специалисты по проективной геометрии знают формулу Лагерра ([14], стр. 48):

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(AB, CD). \quad (21)$$

Здесь φ – угол между двумя прямыми в гиперболической геометрии. Гиперболическая геометрия является порождением проективной геометрии в том случае, когда Абсолютом является линия второго порядка. Гиперболическая геометрия – это геометрия внутри Абсолюта. Кстати, все линии второго порядка на проективной плоскости замкнуты. И прямые линии на проективной плоскости тоже замкнутые. Так что «шевеление» (расширение – сжатие) пространства вполне может сопровождаться сменой одного Абсолюта в виде прямой линии другим Абсолютом в виде линии второго порядка. Т. е. ложный вакуум кипит и вместе с ним кипит и всё пространство, где одна геометрия сменяется другой пока в результате кристаллизации (остывания) не установится прочная евклидова геометрия. В общем, как вы наверное уже заметили, метрическая формула Лагерра прерасщается в формулу (уравнение) Шерка. Действительно:

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(AB, CD) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{\text{Cos}(Y)}{\text{Cos}(X)}\right) = \frac{i}{2} Z.$$

Немного отвлечёмся и скажем два слова о странном, на первый взгляд, коэффициенте $\frac{i}{2}$ (здесь i – мнимая единица). Общеизвестно, что невозможно из гиперболической геометрии (внутри Абсолюта) проникнуть в эллиптическую геометрию (снаружи Абсолюта). Однако, всё-таки существует возможность ([3], стр. 197) перетащить (телепортировать) отрезок прямой из одной геометрии в другую. Сделать это удаётся поэтапно. Сначала отрезок прямой переносится из гиперболической геометрии в псевдогиперболическую геометрию с метрикой \bar{H} , а затем

уже его можно перетащить и в эллиптическую геометрию с метрикой E . Условно это можно проиллюстрировать так:

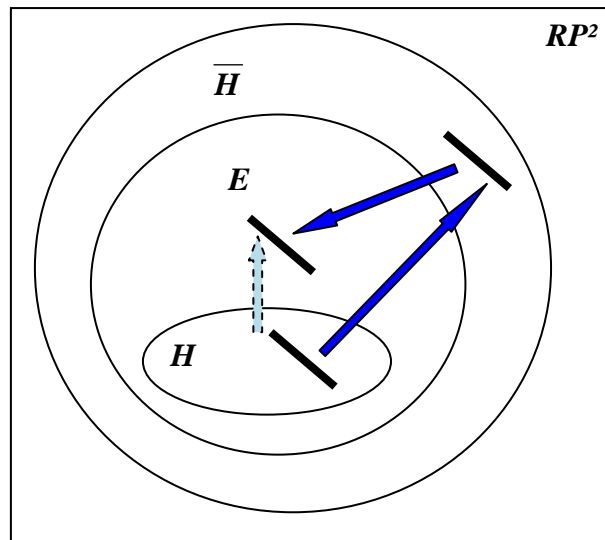


Рис. 22

Так вот связь между псевдогиперболической и эллиптическими геометриями выражается такой формулой:

$$E = \frac{i}{2} \overline{H}.$$

С учётом последней формулы можем записать:

$$\varphi = \frac{E}{H} Z \text{ или } \varphi \cdot \overline{H} = E \cdot \sqrt{S^2 - X^2 - Y^2} \quad (22)$$

Здесь X , Y – координаты, а S – метрика евклидовой геометрии. Т. о. формула (22) связывает метрики четырёх геометрий.

В общем-то показывать пример правил соответствия и не обязательно. Надо было бы просто сказать, что отношение косинусов всегда можно рассматривать, как сложное отношение четырёх точек прямой, но конкретный пример всегда выглядит убедительнее.

Для появления поверхности Шерка в природе должна быть какая-то основа, т. е пространственная решётка. Ранее мы собирались поговорить о пространственной решётке и теперь мы немного коснёмся этого вопроса.

Весь наш повседневный опыт говорит нам, что мы живём в трёхмерном евклидовом пространстве. Единственной правильной фигурой, которой можно упаковать евклидово пространство, является гексаэдр

(куб). Конечно есть и полуправильные тела, которые годятся для упаковки евклидова пространстве. Пример такой фигуры рассматривается в [1]. Фигура эта называется ромбическим додекаэдром. И получается такая упаковка довольно простой перестройкой кубической решётки. Но вообще говорить об этом можно тогда, когда сама геометрия Эвклида уже возникла. А могла ли быть какая-то пространственная решётка ещё в доевклидовый период. Мы помним, что сначала была проективная геометрия, потом – аффинная, а уж потом только возникла евклидова. Более простой и единственной фигурой чем куб является тетраэдр. Но тетраэдрами упаковать евклидово пространство невозможно (заблуждение Аристотеля [16]), если говорить о тетраэдре, как о правильной фигуре. Произвольными же тетраэдрами, конечно же, можно упаковать любое геометрическое пространство. Кстати можно отметить, что в основе построения дифференциальной проективной геометрии лежит именно произвольный (с точки зрения произвола проективной геометрии) координатный тетраэдр [17]. Итак, вернёмся в эпоху ложного вакуума ([6], стр. 217), когда только зарождались пузырьки вакуума истинного (будущие современные Вселенные), пузырьки проективной геометрии. Нам представляется такой сценарий формирования пространства. В проективном пространстве существовали только проективные плоскости. Можно представить модели таких плоскостей в виде сфер (пузырьков) с отождествлёнными диаметрально противоположными точками. По мере остывания Мироздания такие сферы трансформировались в многогранники. Самым подходящим здесь многогранником может выступать гептаэдр, т. к. – это тоже модель проективной плоскости [3]. При остывании пространство-пузырёк сжимается (вспомните детские воздушные шарики), а на месте высвободившегося пространства ложного вакуума начали появляться островки истинного вакуума аффинной геометрии в виде неправильных тетраэдров. Далее гептаэдры «остывают» до октаэдров (см. [3]), а неправильные тетраэдры превращаются в правильные (оптимизируются) – возникает евклидово пространство. Действительно, евклидово пространство можно **единственным** образом упаковать комбинацией из правильных октаэдров и тетраэдров ([16], стр. 33). При такой упаковке каждая грань октаэдра одновременно является и гранью тетраэдра. Т. о., к каждому октаэдру прилежит восемь тетраэдров. Чтобы описать это на математическом языке рассмотрим формулы объёмов правильного октаэдра и тетраэдра.

$$V_T = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}, \quad (23)$$

$$V_o = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}. \quad (24)$$

Здесь формула (23) предназначена для вычисления объёма правильного тетраэдра, а формула (24) – для правильного октаэдра. Очевидно, что оба многогранника должны иметь одинаковую длину ребра равную a .

Рассмотрим такое преобразование:

$$4(2V_T + V_o) = V_K. \quad (25)$$

Здесь V_K - объём куба.

Не трудно убедиться, что преобразование (25) переводит учетверённую сумму объёмов двух тетраэдров и одного октаэдра в объём одного куба. А кубами, мы помним, можно упаковать евклидово пространство. При этом ребро куба равно $a\sqrt{2}$. Причём отметим, что диагональ октаэдра имеет именно такую длину.

Т. о., длина образующего ребра пространственной решётки увеличилась. С наступлением этого преобразования и началась эра нашей расширяющейся Вселенной.

Вообще говоря, те несобственные объекты: бесконечно удалённая точка (точка перспективы, где сходятся рельсы), бесконечно удалённая прямая (линия горизонта), которые мы наблюдаем в силу наших физиологических способностей, по сути – это реликты той геометрии, с которой началось всё Мироздание. И, наверное, не случайно именно так устроено человеческое зрение.

Можно и с ещё большей фантазией взглянуть на наш мир. Всем известно (особенно химикам и биологам), что в нашей природе заложен некий винт: спиральность ракушек, спиральность галактик и т. д.. В рамках нашей заметки мы можем смотреть на этот винт тоже как на реликт, оставшийся от проективной геометрии, т. к. лист Мёбиуса в модели проективной плоскости сам имеет винт. А может быть этот винт – это некое следствие, возникшее ещё в предгеометрии в Эру Планка. Ведь проективное пространство рождалось из предпространства некой туннельной сферы, в модели которой имеется бутылка Клейна. А бутылка Клейна по своей сути невозможна без винта.

Литература

1. Ф. Герман, «Математика и Тонкий Мир», LAP LAMBERT, „Academic Publishing“, 2016
2. Ф. Герман, «Закоулки и перекрёстки математики», LAP LAMBERT, „Academic Publishing“, 2015
3. Ф. Герман, « RP^2 - Проективная плоскость», LAP LAMBERT, „Academic Publishing“, 2015
4. Э. Маделунг, «Математический аппарат физики», М., «Наука», 1968
5. Ю. Г. Борисович и др., «Введение в топологию», М., «Высшая школа», 1980
6. П. Девис. «Суперсила», М., «Мир», 1989
7. Р. Н. Щербаков, Л.Ф. Пичурин «От проективной геометрии к неевклидовой», М., «Просвещение», 1979
8. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия», ч. 2, М., «Просвещение», 1987
9. П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», М., «Наука», 1968
10. Г. С. М. Кокстер, «Введение в геометрию», М., «Наука», 1966
11. М. Берже, «Геометрия. Том первый», М., «Мир», 1984
12. С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», М., «Наука», 1987
13. Г. И. Копылов, «Всего лишь кинематика», М., «Наука», 1981
14. «Математика XIX века», под редакцией А. Н. Колмогорова и др. М., «Наука», 1981
15. Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, «Минимальные поверхности и проблема плато», М., «Наука», 1987

16. М. Гарднер «Математические новеллы», М., «Мир», 1974

17. С. П. Фиников, «Проективно – дифференциальная геометрия», М., «КомКнига», 2006

18. А. Т. Фоменко, Д. В. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., «Наука», 1989