

ТОПОЛОГИЯ И КВАНТЫ

«Химия и жизнь», 1999, № 4, стр.17--19

Лев Верховский

*...Математик играет в игру, правила которой он изобретает сам,
а физик — где их определяет Природа.
Но постепенно становится все более очевидным,
что правила, которые математик считает
интересными, совпадают с теми, что задаёт Природа.*

П.А.М.Дирак

В последнее время опять оживились дискуссии по принципиальным вопросам квантовой механики, чему способствовали новые эксперименты (см статью «Квантовая телепортация» в «Химии и жизни — XXI век», 1998, № 8), а также исследования по квантовым компьютерам («Новости науки», 1998, № 11).

Конечно, квантовая теория доказала свою работоспособность и непротиворечивость, однако сделать ее положения менее парадоксальными, несмотря на многолетние усилия, так и не смогли. Неудовлетворенность этим в свое время выражали Планк, Лоренц, Эйнштейн, Лауэ, де Бройль, Шредингер... А современный британский физик Дж. Полкинхорн заметил: «Один из уроков, который преподала история этой теории, состоит в том, что наука умеет жить с нерешенными вопросами».

Возможно, трудности возникают из-за того, что физику микромира не удалось геометризовать. Об этой проблеме автор недавно поделился своими размышлениями (см. статью «Прообраз красоты мира», 1999, № 1). Давайте попробуем подступиться к ней с несколько иной стороны.

Вихри и интегралы

Немецкий ученый Г. Вейль в 20-х годах придумал геометрию, в которой при параллельном переносе вектора по замкнутому контуру могла меняться не только его направленность (как в пространстве Римана, использованном в общей теории относительности), но и длина. Затем другие ученые доказали, что если под «длиной вектора» понимать фазу связанной с электроном волны, то на

языке Вейля можно выразить квантовые условия Бора и волновой принцип де Бройля.

Но дальнейшего развития в квантовой физике подход Вейля не получил — видимо, ее создатели решили, что волновая механика полностью поглотила, включила его в себя. Быть может, однако, это не совсем так и он мог бы высветить квантовые закономерности с новой, а именно топологической, точки зрения.

(Напомню, что топология изучает те свойства фигур, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях. Представим, что фигуры сделаны из резины и их разрешено как угодно деформировать, но без разрывов и склеек. Тогда, скажем, куб, шар, цилиндр и конус могут переходить друг в друга, но не в тор. Поэтому топологически все они эквивалентны между собой — имеют одинаковые инварианты, а у тора они другие.)

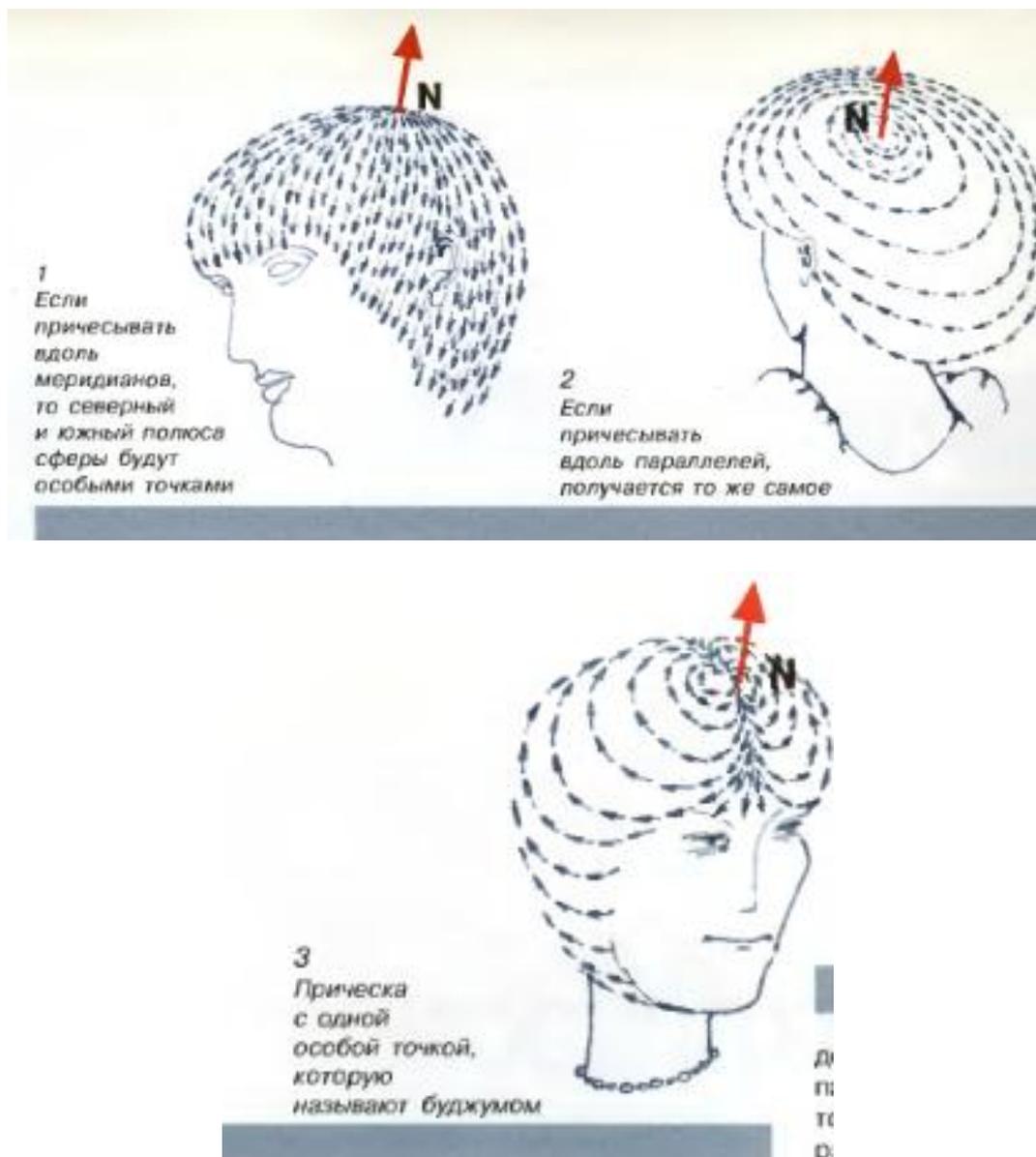
Фактически Вейль допустил, что у движущейся в некотором поле частицы есть характеристика, значение которой по возвращении частицы в исходную точку не совпадает с первоначальным. Математически это означает, что суммарное ее изменение, выражающееся интегралом по замкнутому пути, не равно нулю (или, что то же, интеграл при движении из одной точки в другую зависит не только от самих этих точек, но и от соединяющего их пути).

В таких случаях говорят, что имеет место неинтегрируемость, или неголономность. Причина этого — наличие у поля вихрей (на примере движения жидкости их рассматривали еще Г. Гельмгольц и лорд Кельвин). Другими словами, оно негладко, разрывно — у него есть особые точки, или особенности. А математики выяснили, что их появление может объясняться чисто топологическими причинами и что даже в симметричных, то есть на первый взгляд безобидных, ситуациях векторные поля (к ним относится и электромагнитное поле) могут иметь особенности.

Обычно это показывают на примере так называемого «сферического ежа»: берем сферу, из каждой точки которой торчит иголка-вектор, то есть задаем векторное поле на поверхности сферы. Задача в том, чтобы ежа гладко причесать — добиться, чтобы иголки, во-первых, лежали в касательных плоскостях, а во-вторых, чтобы их направления менялись плавно (без «проборов» и «хохолков»).

Один из основателей топологии А. Пуанкаре доказал, что это сделать невозможно. В самом деле, если мы станем причесывать вдоль «меридианов» (тут уже помесь ежа с глобусом), то оба «полюса» будут особыми точками (рис.

1); если вдоль «параллелей» — опять то же (рис. 2). Есть способ причесать так, чтобы получилась только одна особая точка (рис. 3), которую называют «бужумом» (это имя несуществующего чудовища у Л. Кэрролла). Но причесать совсем без хохолоков не удастся.



А вот если бы наш ёж имел форму тора, то это было бы легко сделать, что и указывает на тесную связь между наличием (или отсутствием) особенностей у векторного поля и топологическими свойствами геометрического объекта, на котором оно задано. Важно, что эти свойства могут быть чувствительны к малейшим его изменениям; так, если из сферы удалить всего одну точку (ту самую, в которой возник бужум), то ёж окажется гладко причесанным. Получается, что локальное изменение геометрии повлияло на ситуацию в целом.

Музыка сфер

Заслуга Вейля состоит в том, что он вольно или невольно обратил внимание физиков на топологические характеристики электромагнитного поля, которые раньше оставались как бы в тени. (Хотя о важности топологии для понимания электромагнетизма писал еще в 1873 г. сам Дж. Максвелл; тогда у этого раздела математики было другое, введенное Г. Лейбницем латинское название «Analysis Situs», то есть «геометрия положения».)

Под влиянием работ Вейля этими вопросами заинтересовался Дирак. Он показал (в теоретических исследованиях, приведших его к выводу о возможности существования магнитного монополя), что у поля, которое создает электрический заряд атомного ядра, тоже есть особенность. Когда в нем движется другой заряд (электрон), поле изменяет какую-то его характеристику и ее суммарное изменение при обходе по замкнутому контуру будет неинтегрируемым (при каждом обороте расхождение с исходным значением будет возрастать). То есть мы приходим как раз к тому эффекту, о котором говорил Вейль.

Тем не менее на опыте его как будто не наблюдают — свойства частиц не зависят от их предыстории. Если же представить, что неголономность сказывалась бы на них, то физическая реальность была бы совсем другой — наверняка более беспорядочной, «какофоничной». А чтобы такого «сумбура вместо музыки» не было, природа, видимо, предусмотрела хитрый фокус: с частицей связывается некоторый периодический процесс (волна), так чтобы при всех наблюдениях (измерениях) он всегда различался на целое число своих периодов. Тогда неинтегрируемость не будет проявлять себя вовне.

Иначе говоря, можно предположить, что волновые свойства материи как бы специально для того и существуют, чтобы из-за неголономности не возникало неоднозначности. А уже из-за них для систем частиц (атомов) возникают квантовые условия (типа боровских), которые можно истолковывать как стоячие волны (в духе де Бройля).

Топология в действии

Оказывается, определив топологические инварианты векторных полей, характеризующих те или иные физические системы, можно многое узнать о поведении этих систем. Сейчас для этого разработаны несложные математические приемы, и центральную роль тут играет понятие области вырождения.

Как мы знаем, устойчивое состояние системы соответствует минимуму свободной энергии, но часто бывает, что он достигается не в одном, а в нескольких или многих состояниях (в таких случаях говорят, что есть вырождение; ясно, что это понятие отражает симметрию системы). Все такие состояния, отличающиеся значением некоторого параметра, скажем, пространственной ориентацией, можно изображать единичными векторами, исходящими из одной точки. Тогда их концы образуют на единичной сфере некоторое множество точек, называемое «областью изменения параметра вырождения».

Например, для ферромагнетика при отсутствии внешнего поля это будет вся сфера (спонтанная намагниченность при температуре ниже точки Кюри может иметь любое направление — изотропность); возможно, что такая область состоит из конечного набора точек — в случае нескольких равноправных между собой, но выделенных среди других направлений, скажем, вдоль кристаллографических осей.

Для сравнения, возьмем нематический жидкий кристалл, то есть конденсированную среду, образованную палочкообразными молекулами, которые стремятся расположиться параллельно. В отсутствие внешних полей и пренебрегая влиянием стенок сосуда, все возможные направления, в принципе, равноправны, то есть концы векторов опять заполняют всю сферу. Но тут надо учесть, что, хотя молекулы могут иметь «головы» и «хвосты», в пучке ориентация каждой из них обычно случайна; поэтому два различающиеся на 180° направления надо отождествить — как бы склеить диаметрально противоположные точки сферы.

Значит, в случае изотропного ферромагнетика получится сфера, а в случае нематика — склеенная сфера. Но топологически эти математические объекты неодинаковы (склеенная сфера соответствует обычной, в которой сделано отверстие, а в него вклеена лента Мебиуса). Так вот, именно из-за этого различия у ферромагнетика от дефектов можно избавиться, а у нематика линейные дефекты (дисклинации) окажутся неустраняемыми.

Подобный топологический анализ сейчас применяют при изучении кристаллов (обычных и жидких), ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей (см. брошюру Г.Е. Воловика и В.П. Минеева «Физика и топология», М.: Знание, 1980).

Возвращение в микромир

Не исключено, что аналогично этому на основании топологических данных можно предсказывать и результаты квантовомеханических опытов. Давайте взглянем под этим углом зрения на опыты по прохождению микрочастиц через экран с двумя щелями, в которых, как известно, отражена вся суть квантовых явлений.

Когда обе щели открыты, поле, наверное, имеет особенность и потому будет неголономность. Возникает интерференционная картина, которую мы обычно рассматриваем как проявление волновых свойств материи. Если же мы закрываем одну щель, то могут измениться топологические характеристики поля — ведь геометрия всей экспериментальной установки стала уже другой. Особых точек и неголономности, наверное, уже нет, поэтому исчезают и волновые свойства. То есть можно допустить, что волновые или корпускулярные свойства проявляют себя в зависимости от того, какова топологическая структура электромагнитного поля — имеет оно особенности или нет.

Понятно, что любые локальные воздействия на микросистемы при процедурах измерения могут, в принципе, изменять топологические инварианты, что повлияет на ситуацию в целом — скажется в других, удаленных местах. Так проливается свет на таинственную связь локального и глобального, над которой давно ломают головы теоретики (парадокс Эйнштейна—Подольского—Розена, квантовая телепортация).

Известный американский физик Дж. Уилер указывал, что возможны «несиловые», информационные взаимодействия между квантовыми объектами. Примером этого служит принцип Паули, когда каждая частица как бы знает, каковы квантовые состояния других частиц. Уилер полагает, что они осуществляются именно через топологические эффекты. Вообще он надеется, что через многосвязные, пеноподобные (то есть с очень сложной топологией) структуры в многомерных пространствах удастся геометрически выразить все аспекты физической реальности, в том числе и квантовые законы.

Эйнштейн как-то сказал: «Если квантовая механика права, то весь мир сошел с ума». Но, может быть, в ее основе лежит простой, связанный с топологией «музыкальный» принцип?