Прообраз красоты мира

«Химия и жизнь», 1999, №1 с.22-26.

Лев Верховский

О, Господи, какой Ты геометр!
И. БАРРОУ, учитель И. НЬЮТОНА

Где материя — там геометрия

Две тысячи лет ученых удовлетворяла геометрия Евклида, которая не только вроде бы правильно описывала реальное пространство, но и давала образец строгой логической системы. После Библии трактат древнегреческого математика был самой переиздаваемой в Европе книгой; можно сказать, что он сформировал стиль западного мышления — приучил к последовательному развитию мысли.

«Начала» Ньютона как бы увенчали «Начала» Евклида. Геометрия, на которую опиралось здание новой механики, стала казаться единственно возможной, а И. Кант даже пришел к выводу, что она дана нам от рождения, то есть предшествует всякому опыту.

В этой теории было только одно сомнительное место—аксиома параллельности, и именно тут в прошлом веке отыскали возможности для построения других, не менее логически обоснованных геометрий — Лобачевского, в которой через каждую точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой, и сферической (ее рассмотрел Б. Риман), где все прямые пересекаются.

Тогда же возникла мысль, что геометрия, в сущности, — наука экспериментальная и выбор того ее варианта, что соответствует физической реальности, нужно сделать на основе опыта и только его. Постепенно завоевывала себе место под солнцем и другая фундаментальная идея — геометрия не есть пассивная арена, на которой разворачиваются физические процессы, а она сама определяет их и определяется ими. Как сказал И. Кеплер, «ubi materia — ibi geometria» («где материя — там геометрия»). Иными словами, геометрия и физика составляют единое целое.

Родилась и еще более радикальная гипотеза о том, что геометрия играет в этой связке ведущую роль и что физические характеристики в будущем сведутся к геометрическим свойствам пространства. Английский математик У. Клиффорд (он умер в возрасте 34 лет в тот год, когда родился А. Эйнштейн) предположил, что все физические явления можно объяснить соответствующими искривлениями пространства. Так возникла программа геометризации физики, лозунги которой — «Физика есть геометрия», «Пространство поглощает материю».

Соотношением геометрии и реальности интересовались многие мыслители прошлого века, например Г. Гельмгольц, Э. Мах. Уже в нашем столетии В. И. Вернадский развивал представления об особой геометрии живого вещества.

После создания специальной теории относительности пришлось перейти к четырехмерному пространству—времени, однако в ней геометрия оставалась все еще отделенной от материи. А вот в общей теории относительности Эйнштейн объяснил гравитацию через кривизну пространства, то есть уже сделал шаг к геометризации физики.

Как расширить геометрию?

Но ведь кроме гравитационного поля есть еще и электромагнитное (в начале нашего столетия были известны только эти два поля), поэтому ученые попытались геометризовать и его. Для этого нужно было еще более расширить геометрию, чтобы в ней, кроме кривизны, появились какие-то дополнительные степени свободы, которым можно было бы приписать ответственность за электромагнетизм.

В начале 20-х годов приват-доцент из Кенигсберга Т. Калуца ввел еще одну пространственноподобную координату, то есть перешел к пятимерной геометрии. Он показал, что возникшие при этом дополнительные величины можно отождествить с электромагнитными потенциалами. Все получалось настолько эффектно, что стали говорить о «чуде Калуцы». Но оставался открытым вопрос: каков физический смысл добавленного измерения и почему его явно не наблюдают? Предположили, что пространство свернуто (компактифицировано) по пятой координате, которая может реально проявлять себя только на сверхмалых расстояниях.

Однако позднее узнали, что кроме электромагнитного есть и другие взаимодействия (сильное, слабое), а значит, для их описания геометрия должна быть еще более расширена. В частности, некоторые теоретики развивают и многомерие — рассматривают пространства шести, семи, десяти и больших измерений.

У проблемы геометризации физики есть и другой аспект: а каковы геометрии микро- и мегамира? Ведь еще Лобачевский и Риман высказали догадку о макроскопической природе евклидовой геометрии, то есть что она обусловлена нашей повседневной практикой. Как говорил Иван Карамазов, «у меня ум евклидовский, земной».

Вполне возможно, что на сверхмалых и сверхбольших масштабах требуются уже неевклидовы представления, и творцы квантовой теории вполне сознавали это. Так, Л. де Бройль писал, что «при попытках втиснуть микроскопические явления в рамки привычных понятий пространства—времени нас все время будет беспокоить чувство, что мы вставляем алмаз в оправу, которая ему не подходит».

Квантовая механика как бы выходит за рамки обычной логики с ее принципом исключенного третьего, ведь микрообъекты — ни частицы, ни волны, а и то и другое сразу. Но постепенно поняли, сама логика тесно связана с геометрией и в какой-то новой геометрии парадоксов может уже не быть. Ибо парадоксальна будет уже сама логика, а не ее выводы.

То же верно и для космологических масштабов. Но как найти наиболее подходящие, «истинные» геометрии и логики?

Лекция в Эрлангене

К середине XIX в. стало известно уже так много различных геометрий, что появилась необходимость их систематизировать. В 1872 г. молодой, а впоследствии крупнейший немецкий математик и педагог Ф. Клейн при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета прочел лекцию, в которой выдвинул общий принцип классификации геометрических теорий (его концепция получила название «Эрлангенской программы»). Клейн писал, что он «хотел изучить различные области математики, чтобы затем, вооружившись этим, обратиться к физическим исследованиям».

Каждую из геометрий, рассуждал он, задают определенные преобразования (образующие, как говорят математики, группу), то есть те изменения фигур, при которых они считаются неразличимыми, равными. Чем сильнее можно искажать фигуры (чем шире группа преобразований), тем меньше, естественно, их свойств при этом сохранится (меньше инвариантов).

Скажем, в евклидовой геометрии две фигуры равны, если их можно совместить (наложить одну на другую), используя сдвиги, повороты и зеркальные отражения. Значит, преобразования задаются этими операциями, которые сохраняют и длины, и углы, то есть максимум свойств. Легко перейти к более широкому преобразованию, когда разрешены также растяжения и сжатия, а неразличимы те фигуры, которые мы называем подобными; тут остаются неизменными углы и отношения длин сторон, но не сами длины.

Далее идет аффинная геометрия, в которой допустимы искажения длин и углов, но не нарушается параллельность прямых, поэтому квадрат переходит в параллелограмм (их считают неразличимыми), окружность — в эллипс. Но все же окружность и эллипс никогда не станут параболой или гиперболой (все эти фигуры называют коническими сечениями, или кониками, поскольку, как выяснили еще в античности, они возникают при сечениях конуса плоскостью). Наконец, существует геометрия еще более общая — проективная, о которой в основном и пойдет речь дальше; в ней все коники могут переходить друг в друга, т. е.становятся неразличимыми.

Иногда думают, что проективная геометрия — это всего лишь одна из областей начертательной геометрии — математической основы черчения. Исторически она действительно возникла в рамках линейной перспективы, которую применяли строители еще в древности (их знания были систематизированы Евклидом в другом его трактате — «Оптике»). Затем, уже в эпоху Возрождения, к ней обратились живописцы, пытавшиеся создавать иллюзию пространства, то есть изображать на плоскости объемные предметы так, как их видит глаз человека.

Искусство и наука

Картину эти мастера рассматривали как «окно» в мир, которое можно получить так. Пусть глаз художника находится в фиксированной точке, в которой сходятся идущие от предметов лучи, — это вершина конуса или пирамиды. А расположенная между ними рама холста определяет плоскость, на которой будет изображение предметов. Значит, холст задает сечение этих лучей плоскостью, и в качестве вспомогательного средства использовали помещенное в раму стекло, на которое наносили видимые через него контуры; у А. Дюрера есть несколько гравюр, показывающих это miracula picturae (чудо рисования).

Для простоты можно считать, что все изображаемые художником объекты лежат в одной плоскости (на другом сечении конуса). Понятно, что получающаяся картина будет зависеть от взаимного положения этих двух плоскостей (предметной и картинной), а также глаза как центра проекции (Рис. 1).

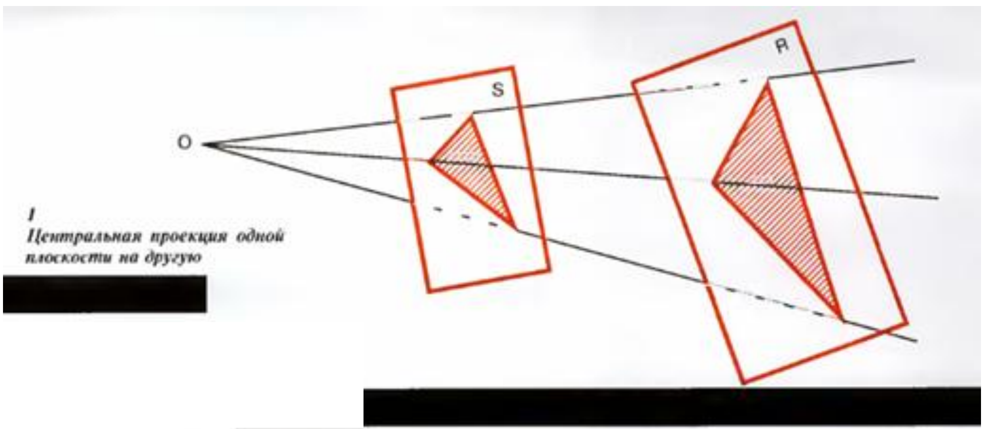

Рис. 1

Сразу видно, что длины, углы, параллельность, то есть все то, чем интересуется школьная геометрия и что на первый взгляд характеризует тот или иной объект, изменяются. Как уже сказано, при такой операции окружность может перейти не только в эллипс, но и в гиперболу или параболу. Значит, эту геометрию интересуют более общие характеристики (в этом она имеет сходство с топологией, где фигуры считаются как бы резиновыми).

Понятно, что какие-то свойства фигур все же при центральных проекциях сохраняются — ведь иначе мы бы никого и ничего не узнали на картине или фотоснимке. В самом деле, точка остается точкой, прямая — прямой, принадлежность точки прямой тоже не нарушится. Есть и более сложные инварианты, например три произвольные точки, лежащие на одной прямой, могут перейти в любые три точки на другой прямой, а вот для четырех точек прямой это уже не так — для них есть сохраняющаяся величина, называемая их сложным (или двойным) отношением.

В проективной геометрии не различают параллельные и пересекающиеся прямые — считают, что параллельные тоже пересекаются, но в бесконечно удаленной, «несобственной» точке; все такие точки, отвечающие разным направлениям прямых на плоскости, образуют несобственную прямую, которую присоединяют к плоскости (у живописцев это линия горизонта). Значит, плоскость дополняется несобственной прямой, а трехмерное пространство — плоскостью. (По аналогии, можно ввести $\boldsymbol{n}$-мерные проективные пространства; мы же для простоты будем пока рассматривать проективную плоскость.)

Двуликий Янус

Как и другие геометрии, проективная абсолютно строго задается системой аксиом. В ней фигурируют два типа объектов, называемые «точками» и «прямыми». Важно, что эта формалистика устанавливает только отношения между объектами, поэтому для них возможны различные интерпретации. В частности, их можно (но совсем необязательно) считать обычными евклидовыми точками и прямыми. И тут открывается поразительная особенность проективной аксиоматики, которая, можно сказать, совершила революцию в геометрическом мышлении: два типа объектов входят в аксиомы совершенно симметрично! Это значит, что каждую из них можно сформулировать двояко — для этого надо только слово «точка» заменить на «прямая», «прямая» — на «точка», вместо «лежит на» — «проходит через».

Поэтому обычно в учебниках эти аксиомы приводят в двух столбцах: слева — одна формулировка, а справа — двойственная ей. Например, слева: каковы бы ни были две точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, существует прямая $\boldsymbol{M}$, проходящая и через $\boldsymbol{A}$, и через $\boldsymbol{B}$ (попросту говоря, через любые две точки проходит прямая). Справа: каковы бы ни были две прямые $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, существует точка $\boldsymbol{A}$, лежащая и на прямой $\boldsymbol{M}$, и на прямой $\boldsymbol{N}$ (то есть любые две прямые пересекаются в некоей точке; напомню, что параллельных прямых не существует, поэтому из аксиомы нет исключений).

Этот принцип проходит последовательно через все аксиомы, а значит, ей будут удовлетворять и все теоремы. И вот оказалось, что некоторые из утверждений, доказанных разными математиками в разные века, есть лишь двойственные формулировки одних и тех же теорем, поэтому, доказав одни, автоматически доказывают и другие.

Важно, что в проективной геометрии определены правила (алгоритм), позволяющие перейти от одного представления к другому, двойственному. Мы привыкли, что в геометрии задают преобразования одних точек в другие точки или одних прямых в другие прямые. Здесь же точки могут переходить в прямые, называемые их полярами, прямые — в точки (их полюса).

Если в этой геометрии можно что-то доказать, то обычно это делается, в противоположность евклидовой, легко. Вот, например, знаменитая теорема Дезарга: берем на плоскости произвольные точки $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C},$ а также точку $\boldsymbol{O}$, через которую проводим прямые $\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}, \boldsymbol{OC}$ (Рис. 2). На каждой из них выбираем еще по одной произвольной точке — $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$. Затем проводим прямые через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{B}_1$ (они пересекутся в $\boldsymbol{P}_1$), $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{C}_1$ (в точке $\boldsymbol{P}_2$), $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{C}_1$ (в точке $\boldsymbol{P}_3$). Теорема утверждает, что точки $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ лежат на одной прямой.

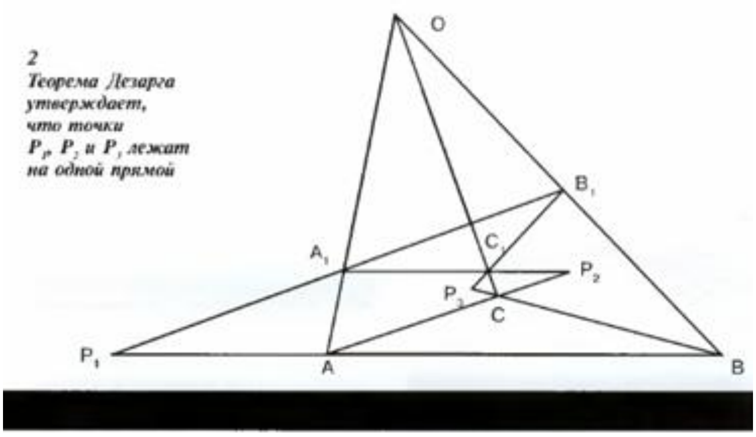

Рис. 2

Доказательство этого вроде бы сложного утверждения становится почти очевидным, если представить, что наш плоский рисунок есть чертеж пространственной фигуры — стоящей на плоскости ***S*** трехгранной пирамиды, которую рассекает другая плоскость ***R*** (Рис. 3). Точки $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ и $\boldsymbol{P_3}$ лежат как в плоскости ***S,*** так и в плоскости ***R***, а значит, и на линии их пересечения, то есть на прямой.

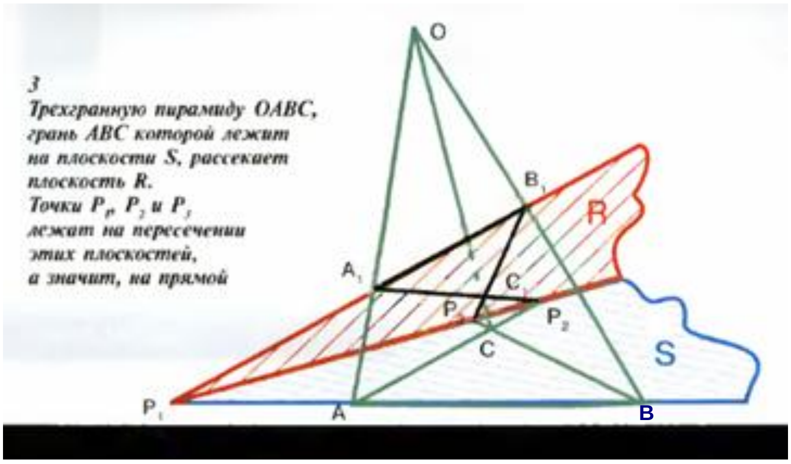

Рис. 3

Интересно, что среди фигурирующих в теореме десяти точек соблюдается полное равноправие: любые четыре из них можно обозначить через ***A, B, C*** и ***O***, и содержание теоремы не изменится. (Это напоминает идею «ядерной демократии», или «зашнуровки», «бутстрапа», популярную в 60-е годы в теории элементарных частиц: все частицы одинаково фундаментальны, «все выражаются через все». Еще можно вспомнить образ из восточной философии: есть зеркальные шарики, в каждом из которых отражаются все остальные.)

Значит, сложные вещи на плоскости могут стать простыми, если выйти в третье измерение (как в теореме Дезарга). В связи с этим у знакомящихся с проективной геометрией нередко возникает странное ощущение, что наша реальность есть проекция — «тень» — какого-то другого, более простого и понятного, но имеющего большее число измерений мира. Французский художник-дадаист М Дюшан выразил это так: «Если трехмерный предмет отбрасывает двумерную тень, поищем четырехмерный, чья тень — мы сами». Впрочем, эта идея привлекала мистиков во все времена — как до, так и после появления проективной геометрии.

Иерархия геометрий

Долгое время эту геометрию развивали как часть евклидовой и только во второй половине XIX в. поняли, что логическую взаимосвязь между ними нужно коренным образом пересмотреть: все перечисленные выше геометрии (Лобачевского, сферическая, аффинная, евклидова) получаются из проективной как частные случаи. Это стало ясно благодаря работам английского математика, юриста по профессии, А. Кэли, а также Ф. Клейна. Кэли сформулировал свое кредо так: «Проективная геометрия — это *вся* геометрия».

Когда хотят перейти к другим, более частным геометриям, то накладывают требование, чтобы некоторый геометрический образ (скажем, прямая или коника), называемый «абсолютом», оставался при проективных преобразованиях самим собой. И тогда самая общая геометрия суживается, превращаясь, в зависимости от вида абсолюта, в тот или иной свой частный случай.

Проективную геометрию можно описывать аналитически и изучать средствами алгебры. При этом вводят так называемые «однородные координаты», которых всегда на одну больше, — именно в них наиболее просто выражаются закономерности этой геометрии. Принцип двойственности наглядно проявляет себя в симметрии алгебраических выражений, которые каждый раз можно трактовать двояко.

Отмечу, что эта геометрия обладает еще несколькими интересными особенностями. Так, проективная плоскость — это замкнутая односторонняя поверхность, наподобие листа Мебиуса: или, скажем, все окружности на ней имеют две общие точки (правда, мнимые). В общем, это достаточно «сумасшедшая» теория. По мнению многих ученых, она очень красива и способна произвести сильное, даже завораживающее впечатление своим изящным и прозрачным стилем. Б. Рассел высказал мысль, что врожденная геометрия — это не евклидова, как думал Кант, а именно проективная.

Но раз так, то можно предположить, что она должна играть какую-то важную роль в физике.

Геометрия и кванты

Отдельные намеки на применимость проективной геометрии в физике есть. Вспомним теорию Т. Калуцы с ее загадкой физического смысла quinta dimensio. Но в 30-х годах В. Паули доказал, что схему Калуцы можно представить проективно, а в этой геометрии, как мы сказали, дополнительная координата вводится естественно (для четырехмерного пространства—времени это будет означать переход в пятимерное пространство). Значит, при проективном подходе сохранятся все результаты теории Калуцы и снимется вопрос о смысле добавочного измерения (проективный вариант пятимерия развивает, в частности, немецкий физик Э.Шмутцер).

П. Дирак признался, что, когда ему требовалось решить задачу, связанную с преобразованиями Лоренца, он использовал проективную геометрию, что сильно упрощало дело; к сожалению, как отметил сам Дирак, он ничего об этом не опубликовал, хотя оставался верен этой геометрии всю жизнь. Но нам важно, что в этой области наша геометрия тоже работает.

И все же, можно сказать, что по-настоящему она в физику не вошла. Более того, как заметил Е. М. Полищук — автор книги о норвежском математике Софусе Ли (М.: Наука, 1983), «XX век пока не был счастливым для проективной геометрии; так, в замечательном современном учебнике Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко она, например, вовсе не упоминается». Нужно учесть, что эта книга известных наших геометров ориентирована на физиков. Обычно физики-теоретики знают самую общую геометрию плохо — она остается для них Золушкой.

Вообще, эта геометрия развивалась очень неравномерно: в XVII веке она родилась и сделала первые шаги, в следующем столетии оставалась в тени, затем последовал мощный рывок в XIX веке, а в нашем — снова застой. Теперь можно ожидать нового ее взлета в наступающем веке, и это хороший повод немного поразмышлять, если угодно — пофантазировать, о грядущем союзе проективной геометрии с физикой.

Итак, отличительное ее свойство — принцип двойственности. Трудно заранее представить, как бы он мог выглядеть в реальности, будь проективная геометрия математической основой физического мира. Но ведь нам известен пример удивительного, не укладывающегося в привычную логику, корпускулярно-волнового дуализма в квантовой механике. Так не предположить ли, что именно так он и проявляется?

В области квантов могла бы работать так называемая эллиптическая геометрия, в которой сохраняются основные черты проективного мира (она соответствует геометрии на сфере, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки). Именно эта сферичность была бы причиной цикличных, волновых свойств микрообъектов. В такой геометрии все прямые имеют одинаковую конечную длину; для нее вводят произвольную константу, которую логично положить равной постоянной Планка.

Выражение, стоящее в показателе волновой функции, симметрично относительно пространственно-временных и импульсно-энергетических характеристик, а в проективной геометрии точно так же выглядит соотношение между полюсами и полярами. Принцип неопределенности, видимо, выражает связь между двойственными представлениями, то есть он должен получаться из полюс-полярного соответствия.

В четырехмерном проективном пространстве преобразование задается шестью парами точек (шесть исходных точек и шесть их образов). Не связано ли это с наличием в природе двенадцати фундаментальных частиц — шести кварков и шести лептонов? Различные физические взаимодействия могли бы соответствовать иерархии геометрий. Знакомая нам формула $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0}$, отражающая факт постоянства скорости света, служит абсолютом, из-за чего в макромире возникает привычная нам евклидовость.

Из Золушки в принцессы

Методологи науки часто вспоминают слова Ю. Вигнера о «непостижимой эффективности математики» в физике. Да, вся история естествознания подтверждает, что природа говорит на математическом языке, причем нередко развивающиеся вроде бы по своей внутренней логике абстрактные структуры вдруг оказываются востребованными физиками (тензоры — в теории гравитации, матрицы — в квантовой механике).

Но бывает и по-другому: есть содержательная, богатая взаимосвязями с другими разделами область, на которую не обращают должного внимания. Хотя в принципе можно строить совершенно произвольные аксиоматические системы и смотреть, к чему они приведут, однако гармоничные конструкции возникают очень редко. То есть в математике действует мощный естественный отбор, а значит, и у самого Создателя, так сказать, не было большого выбора средств. Поэтому если интересные теории все же появляются, то, скорее всего, они должны работать в естественных науках. Это в полной мере относится к проективной геометрии.

И. Кеплер сказал, что «геометрия есть прообраз красоты мира». Не исключено, что этим прообразом служит проективная геометрия, которой суждено превратиться из Золушки в принцессу.